Licence 1
Mathématiques **EM11**

Fiche d'exercices n° 1
Nombres réels et fonctions usuelles

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$x^2 = 2x - 1, \quad x^2 + x + 1 = 0, \quad x^2 + 6x + 8 = 0, \quad x^2 + 2x - 3 = 0, \quad x^3 + x = 2x^2, \quad x^3 + 2x^2 - 6x = 0,$$
$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0, \quad 2x^3 - 3x^2 - 17x - 12 = 0, \quad x^4 - x^2 - 1 = 0, \quad x^4 - 8x^2 + 15 = 0,$$
$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} + 1, \quad x + \frac{1}{x} = 2, \quad x + \frac{1}{x} = 1,$$
$$\sqrt{2x+1} = x + 2, \quad \sqrt{1-2x} = x - 1, \quad x - \sqrt{x} - 1 = 0, \quad x - \sqrt{x-1} - 2 = 0.$$

Exercice 2. Déterminer les réels m tels que l'équation

$$(2m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$$

admette deux racines réelles distinctes et inférieures ou égales à 1.

Exercice 3. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right),$$
$$\sqrt{3}\cos(2x) - \sin(2x) = 1, \quad 2(\sin x)^2 - 3\sin x - 2 = 0.$$

Exercice 4. Démontrer que les inégalités suivantes sont vraies pour toute paire x, y de réels positifs. On précisera les cas d'égalité :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Exercice 5. Montrer que $||\sin x| - |\sin y|| \leq |\sin(x+y)| \leq |\sin x| + |\sin y|$ pour tous x, $y \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$3x + 1 > 1 - 2x, \quad x^2 - 2x + 1 \geq 0, \quad x^2 + 6x + 8 \leq 0, \quad x^3 - 5x^2 + 6x \leq 0,$$
$$\frac{x^2 - 9}{2x+1} \geq 0, \quad \frac{2x - 10}{x+1} \geq x - 5x - 2, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} < 0,$$
$$\sqrt{1-x} > 2x - 3, \quad \sqrt{x-1} > 2x - 3, \quad \sqrt{x+1} < \sqrt{2-x}, \quad \log(2 - x^2) \geq 0,$$
$$|x+1| < |2-x|, \quad |x^2 + x + 1| \leq 3, \quad |x+2| + |\frac{1}{x} + 2| > 5, \quad |x+2| + |\frac{1}{x} + 2| > 0.$$

Exercice 7. Montrer, en le calculant, que le nombre $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ est un entier.

Exercice 8. Simplifier les expressions : $\dfrac{\sqrt[3]{2}\,\sqrt[5]{64^3}\,\sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[5]{16}\,\sqrt[3]{16^4}\,\sqrt[20]{2048}}, \quad \dfrac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}.$

Exercice 9. Simpifier les expressions suivantes, après avoir précisé pour quelles valeurs de x elles sont définies.

$$\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(e^{e^x})), \quad x^{\frac{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, x)}{\mathrm{Log}\, x}},$$
$$\mathrm{ch}(\mathrm{Log}(x + \sqrt{x^2 - 1})), \quad \mathrm{sh}(\mathrm{Log}(x + \sqrt{x^2 + 1})).$$

Exercice 10. Montrer qu'on a $(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)^n = \operatorname{ch} nx + \operatorname{sh} nx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Montrer que pour tout entier p et tout réel x, on a $\mathrm{E}(x+p) = \mathrm{E}(x) + p$.

Exercice 12. Trouver tous les réels x tels que $E(\sqrt{x}) = \sqrt{E(x)}$.
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(\sqrt{x^2+1}) = 2$.

Exercice 13. Calculer les sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(k+3), \quad \sum_{k=0}^{N}(k+2), \quad \sum_{k=3}^{N}(k+1).$

Exercice 14. On fixe un entier $N > 1$.

a) Quand k est un entier quelconque, développer et simplifier l'expression $(k+1)^3 - k^3$.

b) En utilisant le a), exprimer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^2$ sans utiliser le symbole somme.

c) Exprimer sans utiliser le symbole somme la valeur des sommes :

$$\sum_{k=1}^{N}(k+1)^2, \quad \sum_{k=1}^{N}(k+1)(k-1).$$

d) Imaginer une méthode pour exprimer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} k^3$ sans utiliser le symbole somme.

Effectuer le calcul.

Exercice 15.

a) On fixe un entier N. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(x-k) = 0$.

b) Même question avec l'équation : $\displaystyle 6\sum_{k=1}^{N}(x-k)^2 = N(N+1)(2N+1)$. On utilisera le résultat de l'exercice 14.

Exercice 16. Prouver que, pour tout entier $N \geq 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$.
(On pourra calculer $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout k.)

Exercice 17. Démontrer que $\sum_{k=0}^{N} q^k = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$, et calculer cette somme lorsque $q = 1$.

Exercice 18.

a) Montrer que si $x \in [1, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a $x^n - 1 \geq n(x-1)$. L'inégalité est-elle toujours stricte ? On pourra utiliser l'exercice 17.

b) Soit $n \geq 2$ un entier. Prouver qu'on a :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} > \frac{1+3+3^2+...+3^n}{1+2+2^2+...+2^n} > \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

Exercice 19. Si $N \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}$, on pose $\displaystyle S_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

a) Prouver qu'on a, quels que soient x et n, l'égalité : $\displaystyle(1-x)S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - nx^n$.

b) En déduire l'expression de $S_n(x)$ en fonction de n et x, sans symbole de somme.
On pourra distinguer les cas $x = 1$ et $x \neq 1$.

c) Imaginer de même une méthode pour exprimer directement en fonction de n et x la somme :

$$T_n(x) = 1 + 4x + 9x^2 + ... + n^2x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}.$$

d) Voyez-vous un rapport entre les formules trouvées et des calculs de dérivées de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 20. Exprimer les produits suivants sans le signe produit, N étant un entier naturel non nul :

$$\prod_{k=1}^{N} 2, \quad \prod_{k=1}^{N} 2^k, \quad \prod_{k=1}^{N} (N+1-k), \quad \prod_{k=1}^{2N} (N+1-k), \quad \prod_{k=1}^{N} (1 - \frac{1}{k^2}).$$

Exercice 21.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x(x+1)(x+2)(x+3) > 0$.

b) Même question avec l'inéquation : $\prod_{k=1}^{N} (x-k) > 0$, N étant un entier naturel fixé.
Le réel $-\sqrt{\pi}$ est-il solution ?

Exercice 22. Étudier les ensembles de définition des fonctions définies par les formules suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}, \quad f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}},$$
$$f(x) = \log(x+1) - \log(x), \quad f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right),$$
$$f(x) = \frac{1}{x - \mathrm{E}(x)}, \quad f(x) = \sqrt{x - \mathrm{E}(x) - \tfrac{1}{2}}.$$

Exercice 23. Dire, parmi les fonctions suivantes, celles qui sont paires ou impaires.

$f(x) = x^3 + x$, $f(x) = x^3 + x + 1$, $f(x) = C$ (constante), $f = \mathrm{id}$, $f(x) = \mathrm{E}(x)$, $f(x) = (x - \mathrm{E}(x) - 1/2)^2$.

Montrer que la dernière de ces fonctions est périodique.

Exercice 24. Exprimer le plus simplement possible les composées de fonctions suivantes, en mettant les polynômes sous forme développée :

a) $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $f(x) = x^3$, $g(x) = 2 - x$;

b) $f \circ f$, $f \circ (f \circ f)$, $(f \circ f) \circ f$, $f \circ (f \circ (f \circ f))$ avec $f(x) = -\frac{1}{x+1}$.

c) $f \circ g$ et $g \circ f$ avec $g(x) = \mathrm{E}(x)$, $f(x) = x - \mathrm{E}(x)$.

Exercice 25. Les fonctions considérées dans cet exercice sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a) Soit g une fonction telle que, pour toute fonction f, on ait : $g \circ f = f$; montrer que g est la fonction identité. (On utilisera l'hypothèse en prenant pour f des fonctions constantes).

b) Soit g une fonction telle que, pour toute f, on ait $g \circ f = f \circ g$. Montrer que g est l'identité.

c) Soit g une fonction telle que, pour toute f, on ait $g \circ f = g$. Montrer que g est constante.

Exercice 26.

a) Si $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$ sont deux fonctions affines, montrer que $f \circ g$ est affine et calculer sa pente et son ordonnée à l'origine en fonction de a, a', b, b'.

b) Trouver toutes les fonctions affines f telles que $f \circ f = \mathrm{id}$.
Existe-t-il d'autres fonctions ayant cette propriété ?

c) Montrer que les seules fonctions affines f telles que $f \circ E = E \circ f$ sont celles mises en évidence à l'exercice 11.

Exercice 27. Soit $x < y$ deux nombres réels, et $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) = \dfrac{x + ty}{1 + t}$. Étudier la monotonie de f (sans calculer de dérivée).

Exercice 28. Soit f et g deux fonctions réelles définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$ on pose

$$M(x) = \max(f(x), g(x)) \quad \text{et} \quad m(x) = \min(f(x), g(x)).$$

Montrer que les fonctions M et m sont croissantes si c'est le cas de f et de g.

Exercice 29. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^5, \quad f(x) = \sin(x)\cos(x), \quad f(x) = xe^x, \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad f(x) = \frac{1}{\log x}.$$

Exercice 30. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = (\sin x)^3, \quad f(x) = \tan(5x), \quad f(x) = e^{x^2},$$
$$f(x) = 1 - 2(\cos x)^2, \quad f(x) = \log(3x), \quad f(x) = \log(\sin(5x)).$$

Exercice 31. Étudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^3 + x^2 + 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 32. Étudier et tracer le graphe des fonctions :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Exercice 33. Fonctions trigonométriques hyperboliques. On pose pour tout x réel :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

a) Étudier les fonctions ch et sh, et tracer leur graphe.
b) Montrer que sh est bijective.
c) Résoudre l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$ d'inconnue x, et en déduire l'expression de la fonction réciproque de sh.