

FICHE D'EXERCICES N° 2

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1. Calculer les limites suivantes en factorisant les termes dominants :

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27x^3 + 2x + 3}{x^{18} - 14x + 2}, & m &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-10x^5 + 2x^3}{15x^4 + 20x^2}, & n &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^9 + x^4 - 2x^3}{x^{17} - x^7 + x^3}, \\
 o &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^9 - x^4 - 2x^2}{x^7 - 3x^4 + 2x^3}, & p &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}, & q &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^4 + x - 1}{(x-1)^3 + (x-1)^2}, \\
 r &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 2(x-1)^2}{(x-1)^2 + (x-1)^3}, & s &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3}, & t &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}, \\
 u &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}, & v &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|x^4 + x^3 - 16x}{1 - x - 12x^5}, & w &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x}{1 - x - 12x^5}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes en se ramenant en 0 :

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}, & m &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}, & n &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}, \\
 o &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}, & p &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x^2 + 4x + 4)\sqrt{2-x}}, & q &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sin(\pi x)}{x^2 + 4x - 5}, \\
 r &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}{x^3 - 3x - 2}, & s &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\sin^2 x}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3. Étudier si les limites suivantes existent, et si oui les calculer :

$$\begin{aligned}
 l &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(x^3 + 1)}{x^3(x^3 - 1)}, & m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}), & n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^2 - x^2), & o &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a + 1}{x^b + x}, \\
 p &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}, & q &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^{-a} - x^{-b}), & r &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^a + x} - \sqrt{x^b + 1}).
 \end{aligned}$$

On discutera le cas échéant suivant la valeur des paramètres $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Exercice 4. Soit $f : x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$).

- Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(2x) - f(x) = 0$?
- Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = 0$?
(On pourra faire apparaître la dérivée de f en 1.)

Exercice 5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x} = 1$.

Exercice 6. Soit f une fonction, x_0, l des réels. On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
Montrer que si $l \notin \mathbb{Z}$, on a $\lim_{x \rightarrow x_0} E \circ f(x) = E(l)$. Que se passe-t-il si $l \in \mathbb{Z}$?

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. Montrer, en utilisant la définition des limites, que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \implies \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}.$$

Exercice 8. Dans cet exercice on considère des fonctions définies sur \mathbb{R} entier.

- Trouver toutes les fonctions périodiques qui admettent une limite en $+\infty$.
- Trouver toutes les fonctions vérifiant $f(x) = f(2x)$ pour tout x et qui admettent une limite finie en 0.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et $x_0 \in \mathbb{R}$.

- À l'aide la définition d'une limite finie, écrire ce que signifie la phrase suivante :
« f n'admet pas de limite finie en x_0 ».
- Soit $\varepsilon_0 > 0$. Montrer que la propriété suivante, si elle est vraie, interdit à f d'avoir une limite finie en x_0 :
« Pour tous a, b tels que $a < x_0 < b$, il existe $x_1, x_2 \in]a, b[$ tels que $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon_0$ ».
- On suppose que $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existent.
Montrer que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.
- Soit $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f n'admet pas de limite en 0.
- Soit $f(x) = E(x)$. Montrer que f ne possède pas de limite en 0. Étudier la limite de $E(x^2)$ en 0.

Exercice 10. Pour chacune des fonctions suivantes, vérifier que le taux d'accroissement $T(x, y)$ entre deux réels distincts x et y est donné par l'expression proposée :

- pour $f(x) = x^3$, $T(x, y) = x^2 + xy + y^2$;
- pour $f(x) = \frac{1}{x}$, $T(x, y) = -\frac{1}{xy}$;
- pour $f(x) = \sqrt{x}$, $T(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Utiliser les calculs précédents et la définition de la dérivée pour retrouver la valeur de $f'(x_0)$.
Pouvez-vous généraliser ces résultats au cas de $f(x) = \sqrt[n]{x}$?

Exercice 11. Posons $f(x) = x^{x+x^{-1}}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 0$. La fonction f ainsi définie sur \mathbb{R}_+ est-elle continue? dérivable? Sa dérivée est-elle continue? (*La dernière question est assez calculatoire.*)

Exercice 12. Rappelons que l'on note E la fonction « partie entière ».

Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en 1?

- $f(x) = E(x)^2$
- $g(x) = (x - 1)E(x)$
- $h(x) = (x - 1)^2 E(x)$

Exercice 13. On pose $f(x) = (x - E(x)) \sin \frac{\pi x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f est périodique et en déterminer une période.
- Déterminer l'ensemble des entiers n tels que f est continue en n .
- En quels entiers f est-elle dérivable?

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$.

- Montrer que $\frac{f(\sin x)}{x}$ a une limite quand x tend vers 0 et calculer cette limite.
- Soit n un entier naturel, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^n - 1) - f(x - 1)}{x - 1}$ existe et la calculer.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x^2) - f(3x^2)}{x^2}$ existe et la calculer.

Rappel. On dit que les graphes de deux fonctions sont *tangents* en un point s'ils se coupent en ce point et y ont la même tangente.

Exercice 15. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ on a $\log x < x - 1$.

On pose $u(x) = x^e$ et $v(x) = e^x$ pour $x > 0$.

- Comparer u et v sur \mathbb{R}_+^* . (*On pourra prendre le log puis poser $y = x/e$.*)
- Montrer que les graphes de u et v sont tangents en un unique point.
- Représenter ces graphes et leur tangente commune sur un dessin.

Exercice 16. Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y = x^2$.

- Montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est tangente à \mathcal{P} si et seulement si $4b + a^2 = 0$.
- Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites tangentes à \mathcal{P} de pentes $a_1 \neq a_2$.
Déterminer en fonction de a_1 et a_2 les coordonnées du point d'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .
- Montrer que deux tangentes à \mathcal{P} sont perpendiculaires **ssi** elles se coupent sur la droite $y = -1/4$.