

FICHE D'EXERCICES N° 3

Développements limités et applications

Notation. Dans cette feuille la notation « $DL_n(a)$ » signifie « développement limité à l'ordre n en a ».

[Utilisation du formulaire]

Exercice 1. Déterminer le $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{1+2x}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad h(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad i(x) = \cos(x), \quad j(x) = \sin(2x^2).$$

Exercice 2. Donner le $DL_n(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 3. Montrer qu'il existe des réels a, b, c, d et une fonction $\varphi :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uniques tels que

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{\varphi(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0.$$

Donner la valeur de a, b, c et d .

[Addition]

Exercice 4. Examiner la parité de la fonction f définie pour $|x| < 1$ par

$$f(x) = \text{Log} \frac{1+x}{1-x}$$

et calculer le $DL_n(0)$ de f pour tout $n \in \mathbb{N}$.

[Produit]

Exercice 5. Calculer les $DL_3(0)$ de

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1+x}}, \quad g : x \mapsto \cos x \sin x, \quad h : x \mapsto e^{-x} \cos(3x), \quad i : x \mapsto \text{Log}(1+x) \text{Log}(1-x).$$

Exercice 6. Calculer les $DL_5(0)$ de

$$f : x \mapsto \text{ch}(x) \sin(x), \quad g : x \mapsto \sqrt{1-x^3} \sqrt[3]{1+x^2}, \quad h : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}, \quad i : x \mapsto \frac{\sin x}{\exp x}.$$

[Ailleurs qu'en 0]

Exercice 7. Calculer, lorsqu'ils existent :

- les $DL_3(1)$ de $(\text{Log } x)/x^2$ et $e^x \sqrt{x}$,
- les $DL_2(\frac{1}{4})$ de $\text{Log } x$ et $\cos(\pi x)$,
- le $DL_3(3)$ de $\sqrt{x-3}$.

Exercice 8. Calculer le $DL_4(1)$ des fonctions

$$f : x \mapsto \sqrt{x} \text{Log } x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

[Composition, inverse]

Exercice 9. On se propose de calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto (1+x)^x$.

- Effectuer le $DL_4(0)$ de $u(x) = x \operatorname{Log}(1+x)$ et vérifier que $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$.
- Calculer le $DL_4(0)$ de $u(x)^2$, $u(x)^3$ et $u(x)^4$.
- Déduire de ce qui précède le $DL_4(0)$ de $f(x) = e^{u(x)}$.
- Calculer le $DL_3(0)$ de $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice 10. Calculer les $DL_4(0)$ de

$$f : x \mapsto e^{(e^x)}, \quad g : x \mapsto \operatorname{Log}(\cos x), \quad h : x \mapsto \sqrt{1 - \sin(x)}.$$

Exercice 11. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$. On utilisera le $DL_2(0)$ de $\frac{1}{1-u}$.

Quel est le $DL_5(0)$ de f ?

[Taylor-Young]

Exercice 12. Calculer par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En déduire celles de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ puis $h : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$.

Retrouver le développement de Taylor de f à tout ordre.

Exercice 13. Calculer le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$.

En déduire la valeur de $f^{(4)}(0)$. Essayer de retrouver cette valeur en calculant $f^{(4)}(x)$ pour tout x .

[Continuité, dérivabilité]

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = \cos x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

- Quel théorème permet de déduire l'existence de DL_n de l'existence de dérivées $n^{\text{ièmes}}$?
- Montrer que si une fonction admet un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0, alors elle est dérivable en 0.
- Montrer que f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, mais n'est pas dérivable deux fois en 0.

Exercice 15. On pose $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$.

- Montrer que l'on peut prolonger f par continuité en 0 et que f est alors dérivable sur \mathbb{R} entier.
- Montrer que f admet un $DL_1(0)$, mais que f' n'admet pas de $DL_0(0)$.

[Limites]

Exercice 16. Calculer les limites en 0 des fonctions définies comme suit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 + x^4}{3x^3 + x^5}, & g(x) &= \frac{x^4 + x^5 + x^6}{x^2 - 2x^3 + 3x^4}, & h(x) &= \frac{x(1 + \cos x) - 2 \tan x}{2x - \sin x - \tan x}, \\ i(x) &= \frac{3^x - 2^x}{x}, & j(x) &= \frac{x - \sin x}{(\tan x)^3}, & k(x) &= \frac{e^{\sin x} - \cos x}{\cos(\sin x) - e^x}, \\ l(x) &= \frac{\ln(1 + \tan x) - \sin x}{\tan x - \sin x}, & m(x) &= \frac{\ln(\cos(\pi x))}{\ln(\cos(2\pi x))}, & n(x) &= \frac{\operatorname{sh} x + \sin x - 2x}{x(\operatorname{ch} x + \cos x - 2)}. \end{aligned}$$

Exercice 17. Déterminer les limites suivantes :

$$l = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^3 - 1}, \quad m = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\sin(x - \frac{\pi}{4})}, \quad n = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x^3 + x^2 - x - 1}, \quad o = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}}{(x-2)^2}.$$

Exercice 18. Déterminer la limite de $f(x) = \frac{2}{(\cos x)^2} + \frac{1}{\operatorname{Log}(\sin x)}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

On réduira au même dénominateur après avoir posé $u = x - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19.

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sin x)^2} - \frac{1}{x^2}$.
- b) Soit f une fonction impaire de classe C^3 au voisinage de 0. On suppose que $f'(0) = 1$ et on pose $f^{(3)}(0) = a$. Calculer en fonction de a la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)^2} - \frac{1}{x^2}$.
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\tan x)^2} - \frac{1}{x^2}$.

Exercice 20. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^5}$.

[Tangentes, asymptotes]

Exercice 21. On considère les fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, \quad f_2(x) = \frac{1+x+x^2}{1-2x+3x^2}.$$

- a) Calculer $f'_i(0)$ pour $i = 1, 2$.
En déduire l'équation $y = ax + b$ de la tangente au graphe de f_i au point d'abscisse 0.
- b) Écrire le $DL_3(0)$ de f_1 et le $DL_2(0)$ de f_2 . Retrouver le résultat de la question précédente.
Quelle méthode préférez-vous ?
- c) En utilisant le résultat de la question b, étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$ pour x proche de 0.
Quelle est la position du graphe de f par rapport à sa tangente au voisinage du point d'abscisse 0 ?

Exercice 22. On définit trois fonctions f_1, f_2, f_3 en posant

$$f_1(x) = x \left(\cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \right), \quad f_2(x) = \left(2x + 3 + \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}, \quad f_3(x) = \sqrt[4]{16x^4 + x^3 + 1}.$$

- a) Trouver trois fonctions $g_i, i = 1, 2, 3$, telles que $f_i(x) = xg_i(\frac{1}{x})$.
- b) Donner le développement limité à trois termes en 0 des fonctions g_i .
- c) Pour chaque fonction f_i , trouver des réels a, b et c tels que

$$f_i(x) - (ax + b) = \frac{1}{x}(c + \varphi(x)),$$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$. Montrer que le graphe de f_i admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. Quelle est la position du graphe par rapport à cette asymptote ?

Exercice 23. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ le cercle de centre $(4, 3)$ et de rayon 5, et C_1 l'intersection de C avec le demi-plan d'équation $y \leq 3$. On pose $g(x) = 3 - \sqrt{9 + 8x - x^2}$. On note P_a la parabole d'équation $y = -\frac{4}{3}x + ax^2$.

- a) Faire une figure.
- b) Montrer que C_1 a pour équation $y = g(x)$.
- c) Déterminer le développement limité de g à l'ordre 2 au voisinage de 0.
- d) Quelle est l'équation de la tangente à C en $(0, 0)$?
- e) Comparer les positions relatives au voisinage de $(0, 0)$ de C et des trois paraboles $P_{1/6}, P_{1/2}$ et $P_{25/54}$.

[Études de fonction]

Exercice 24. On se propose de tracer le graphe de $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

- a) Étudier la parité et les variations de f .
- b) Placer les tangentes au graphe de f aux points d'abscisses 0, 1, $\sqrt{3}$, 2.
- c) Étudier la position du graphe par rapport à ses tangentes aux points ci-dessus.
- d) Tracer l'allure du graphe de f .

Exercice 25. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - 2}$: domaine de définition, parité, tableau de variations, branches infinies.