Questions de cours

Pour le partiel 1 :

Proposition. Soit $f : X \to Y$. Pour A, $B \subset Y$ on a $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap F^{-1}(B)$. Pour A, $B \subset X$ on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Proposition. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $U \cap V$ est ouvert. Soit $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue et définie sur $\mathbb{R}^n$ entier. Si Y est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(Y)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. Alors deux sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Pour le partiel 2 :

Proposition. Soit X une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$. Alors X est compacte.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ entier, et g la restriction de f à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors les extrémums locaux de g sont des extrémums locaux de f.

Proposition. L'image $f(X)$ d'un compact $X \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue $f : X \to \mathbb{R}$ est un compact.

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Les racines du polynôme caractéristique P_f sont exactement les valeurs propres de f.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. Alors on a $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$. Si $q(v)$ ne s'annule que pour $v = 0$, on a de plus $E = F \oplus F^\perp$.

Pour le partiel 3 :

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extrémum local et des dérivées partielles en $a \in U$, alors ces dérivées partielles sont nulles en a.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. Alors il existe une base de E orthogonale relativement à q.

Proposition. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie-positive et $q_0 : u \mapsto \|u\|^2$ le carré de la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $q(u) \geq \alpha q_0(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

On demande de plus de connaître les énoncés des deux définitions suivantes :

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application et $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe une forme linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et une fonction $\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nulle et continue en 0, telles que

$$f(a+u) = f(a) + L(u) + \|u\|\epsilon(u)$$

pour tout $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + u \in U$. Alors L est unique et notée $L = df(a)$.

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $a \in U$. On appelle DL_2 de f en a l'identité $f(a+u) = f(a) + L(u) + q(u) + \|u\|^2\epsilon(u)$, où ϵ est nulle et continue en 0, et où L, q sont données par les formules

$$L(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{et} \quad q(h_1, \ldots, h_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Pour le partiel 4 :

On demande de connaître les démonstrations des résultats suivants :

Proposition. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ un endomorphisme. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in L(E)$ tel que $f(u) \cdot v = u \cdot f^*(v)$ pour tous u, $v \in E$.

Proposition. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ un endomorphisme symétrique. On suppose que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel tel que $f(F) \subset F$. Montrer que $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

Proposition. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$. Alors : f est une isométrie $\Longleftrightarrow f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ pour tous u, $v \in E \Longleftrightarrow f \circ f^* = f^* \circ f = \mathrm{id}$.

On demande de plus de connaître précisément l'énoncé suivant, mais pas sa démonstration :

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f, $\varphi : U \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On considère $F = \{a \in U \mid \varphi(a) = 0\}$ et on fait l'hypothèse que φ n'admet pas de point critique dans F. Alors, si f admet en $a \in F$ un extrémum local sur F, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(\partial f/\partial x_i)(a) = \lambda \times (\partial \varphi/\partial x_i)(a)$ pour i.