Questions de cours

Pour le partiel 1 :

Proposition. Soit U, V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $U \cap V$ est ouvert. Soit $U_1, \ldots, U_k, \ldots$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Alors $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit $a_k = (x_k, y_k)$ une suite de points de $\mathbb{R}^2$ qui converge vers $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $a \in O$ alors $a_k \in O$ à partir d'un certain rang.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une application continue et définie sur $\mathbb{R}^n$ entier. Si Y est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(Y)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in L(E)$. Alors deux sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Proposition. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Les racines du polynôme caractéristique P_f sont exactement les valeurs propres de f.

Pour le partiel 2 :

Proposition. Soit X une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$. Alors X est compacte.

Proposition. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ entier, et g la restriction de f à un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$. Alors les extrémums locaux de g sont des extrémums locaux de f.

Proposition. L'image $f(X)$ d'un compact $X \subset \mathbb{R}^2$ par une application continue $f : X \to \mathbb{R}$ est un compact.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique et $q : E \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée. Alors on a $\varphi(v, w) = \frac{1}{4}(q(v + w) - q(v - w))$ pour tous v, $w \in E$.

Pour le partiel 3 :

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q, et F un sous-espace de E. Alors on a $\dim F + \dim F^\perp \geq \dim E$.

Proposition. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q. Alors il existe une base de E orthogonale relativement à q.

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet un extrémum local et des dérivées partielles en $a \in U$, alors ses dérivées partielles sont nulles en a.

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, elle admet des dérivées partielles en a et sa différentielle $L = df(a)$ est donnée par la formule suivante :

$$L(h_1, \ldots, h_n) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \cdots + h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Pour le partiel 4 :

On demande de connaître précisément la définition suivante :

Définition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2 et $a \in U$. On appelle DL_2 de f en a l'identité $f(a + u) = f(a) + L(u) + q(u) + \|u\|^2\epsilon(u)$, où ϵ est nulle et continue en 0, et où la différentielle L et la forme quadratique hessienne q sont données par les formules

$$L(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \quad \text{et} \quad q(h_1, \ldots, h_n) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

On demande de plus de connaître les démonstrations des résultats suivants :

Lemme. Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie-positive et $q_0 : u \mapsto \|u\|^2$ le carré de la norme usuelle de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $q(u) \geq \alpha q_0(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

Proposition. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in U$ un point critique de f et q la forme quadratique hessienne de f en a. Si q est définie-positive alors f admet un minimum local en a.

Proposition. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ un endomorphisme. Il existe un unique endomorphisme $f^* \in L(E)$ tel que $f(u) \cdot v = u \cdot f^*(v)$ pour tous u, $v \in E$.

Proposition. Soit E un espace euclidien et $f \in L(E)$ un endomorphisme symétrique. On suppose que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel tel que $f(F) \subset F$. Alors on a $f(F^\perp) \subset F^\perp$.