

# Plan du cours

## Première partie : Analyse

### Chapitre 1. Structures fondamentales de l'analyse

03/10

#### I Nombres réels

Notations :  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\in$ .

##### a) Algèbre

Symboles  $\sum$  et  $\prod$ . Identités remarquables. Racines d'une équation du second degré.

##### b) Ordre

Notations  $\max$ ,  $\min$ ,  $|\cdot|$ . Intervalles. Inégalité triangulaire. Partie entière.

#### II Fonctions

Notations.

##### a) Algèbre

Opérations sur les fonctions. Parité, périodicité. Composition. Exemples.

##### b) Ordre

Comparaison entre fonctions. Monotonie.

### Chapitre 2. Limites et continuité

05/10

#### I Limites

##### a) Définitions

Définition « intuitive », définition « mathématique » (hors-programme). Limites à droite, à gauche, infinies, en l'infini. Dessins, exemples de discontinuités.

##### b) Algèbre

Limites usuelles et opérations : cf exos.

##### c) Ordre

Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes.

##### d) Continuité

Définition.

#### II Continuité sur un intervalle

Définition.

##### a) Image d'un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires. Dessins. Applications à la résolution d'équations.

##### b) Image d'un segment

Fonction majorée, minorée, bornée. Maximum, minimum. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

## Chapitre 3. Dérivation

11/10

### I Dérivation en un point

#### a) Définition

Taux d'accroissement. Nombre dérivé, à droite, à gauche. Définitions équivalentes. Dérivable  $\Rightarrow$  continu.

#### b) Interprétation géométrique

Cordes, tangentes d'un graphe. Pentés. Demi-tangentes.

#### c) Algèbre

Produit, somme, quotient, composition. Exemples : fractions rationnelles, racine carrée.

17/10

### II Dérivabilité sur un intervalle

Définition.

#### a) Ordre (1)

Conséquences de la monotonie et de la présence d'extrema sur la dérivée.

#### b) Théorème des accroissements finis

Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Application : inégalité des accroissements finis.

#### c) Ordre (2)

Influence du signe de la dérivée sur la monotonie.

## Chapitre 4. Développements limités

18/10

### I Formule de Taylor-Young

#### a) Dérivées d'ordre supérieur

Définition. Classe  $C^n$ . Opération. Cas des polynômes.

#### b) Formule de Taylor-Young

Formule. Interprétation graphique pour l'ordre 2.

#### c) Fonctions usuelles

Dérivées à tout ordre de sin, cos, exp. Formules de Taylor-Young en 0.

24/10

### II Développements limités

#### a) Définition

Définition, lien avec Taylor-Young. Exemples :  $1/(1-x)$ ,  $1/(1+x)$ .

#### b) Algèbre

Développement limité d'une somme, d'un produit, d'une composée, d'un quotient : méthodes.

02/11

#### c) Applications

Calcul de limites : résolution de formes indéterminées. Asymptotes au graphe d'une fonction et position relative.

## Chapitre 5. Fonctions de plusieurs variables

08/11

### I Définitions

#### a) Les espaces $\mathbb{R}^n$

Définition pour  $n = 2, 3$  ou 4. Opérations d'espace vectoriel, produit scalaire. Équation d'une droite ( $n = 2$ ), d'un plan ( $n = 3$ ).

#### b) Fonctions de plusieurs variables

Définition, graphe. Fonctions linéaires, affines.

## II Dérivation

### a) Premier ordre

Dérivées partielles. Gradient, différentielle en un point. Plan tangent ( $n = 2$ ).

09/11

### b) Deuxième ordre

Point critique. Minimum local, maximum local, point col.

### c) Changement de variable

Formule pour  $f \circ (u, v)$ .

## Deuxième partie : Algèbre

Anneaux, Corps (hors-programme).

## Chapitre 6. Nombres complexes

22/11

### I Définitions

#### a) Opérations

Nombres complexes, partie réelle, partie imaginaire. Structure d'anneau. Module et conjugué. Inverse.

#### b) Le plan de Cauchy

Représentation graphique. Inégalité triangulaire. Module et argument. Notation  $e^{i\theta}$ , formules d'Euler.

### II Résolution des équations polynômiales

#### a) Cas général

Racines  $n^{\text{ièmes}}$  de l'unité. Théorème de D'Alembert-Gauss.

23/11

#### b) Second degré

Racines carrées d'un nombre complexe. Racines d'un trinôme du second degré.

## Chapitre 7. Matrices

30/11

### I L'anneau des matrices

#### a) Définitions

Définition. Matrices ligne, colonne, diagonale, triangulaire. Structure vectorielle. Produit d'une ligne par une colonne, structure d'anneau.

#### b) Particularités

Non-commutativité de la multiplication. Matrices non-inversibles, diviseurs de 0.

### II Lien avec les systèmes linéaires

07/12

#### a) Généralités

Écriture matricielle d'un système. Solution particulière, sous-espace des solutions.

#### b) Méthodes de calcul

Systèmes triangulaires, méthode pour s'y ramener.

# Chapitre 8. Polynômes

13/12

## I Généralités

### a) Définition

Expression linéaire (à coefficients dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) en les puissances d'une indéterminée  $X$ . Évaluation en un point d'un anneau dont le centre contient  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). Fonction polynôme.

### b) Opérations

Somme, produit.  $\mathbb{R}[X]$  est un anneau et  $X^p X^q = X^{p+q}$ .  $\mathbb{R}[X]$  est commutatif, intègre, mais n'est pas un corps. Polynôme dérivé, cas d'un produit, d'une somme.

### c) Degré

Définition,  $\deg(0) = -\infty$ . Degré d'un produit, d'une somme. Polynôme constant. Coefficient dominant, polynôme unitaire ou normalisé.

## II Arithmétique

### a) Divisibilité

Définition, propriétés élémentaires. Division euclidienne.

### b) Racines

Racines et divisibilité. Racines multiples, lien avec la dérivée. Nombre maximal de racines.

### c) Plus grand commun diviseur

Définition. Algorithme d'Euclide et théorème de Bézout. Polynômes premiers entre eux, théorème de Gauss. PPCM.

### d) Irréductibilité

Définition. Lemme d'Euclide. Décomposition en facteurs irréductibles. Cas de  $\mathbb{C}[X]$  et  $\mathbb{R}[X]$ . Nombre de racines complexes.

03/01

## III Fractions rationnelles

### a) Définition

Fractions rationnelles, opérations, corps. Degré, forme irréductible, racines, pôles, valeur en un point.

### b) Décomposition en éléments simples

Partie entière. Éléments simples de  $\mathbb{C}(X)$  et  $\mathbb{R}(X)$ . Décomposition en éléments simples. Division suivant les puissances croissantes.

10/01