Université de Caen
U.F.R. de Sciences
- Mathématiques -

Année Universitaire 2005-2006
Lundi 20 février 2006

LICENCE DE SCIENCES
PARCOURS MASS - ANNÉE L2
EMA 43
PARTIEL N° 1

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

DURÉE : 2 HEURES

AUCUN DOCUMENT, AUCUNE CALCULATRICE NE SONT AUTORISÉS

I. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On définit deux suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$ par $\alpha_n = a + \dfrac{b-a}{2^n}$ et $\beta_n = b + e^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a < \alpha_n \leq b < \beta_n$.
2) Etudier les suites $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ et $(\beta_n)_{n\geq 0}$: définition, croissance, limite éventuelle.
3) Rappeler la propriété caractéristique des fermés de $\mathbb{R}$ concernant les suites réelles.
4) Déduire de ce qui précède que $]a, b]$ n'est ni fermé, ni ouvert.

II. $\forall n \in \mathbb{N}$, on considère l'intervalle $I_n =]e^{\frac{n}{n+1}}, 3^{\frac{2n+3}{2n+1}}] =]u_n, v_n]$.

1) Etudier les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$: définition, croissance, limite éventuelle.
2) I_n est-il fermé ? ouvert ? ni l'un ni l'autre ?
3) Déterminer $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$. I est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ?
4) Déterminer $J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. J est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ?

II. 1) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle convergente telle que $u_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geq 0$.

2) Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 \leq y \leq x\}$. Représenter E, en commançant par déterminer l'intersection de la droite $y = x$ et de la parabole $y = x^2$.
3) Soit (x_n, y_n) une suite d'éléments de E qui converge dans $\mathbb{R}^2$ vers (x, y).
Montrer grâce au 1) que $(x, y) \in E$. En déduire que E est un fermé de $\mathbb{R}^2$.
4) Etudier la suite $\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. En déduire que E n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

III. On rappelle que $\mathbb{R}_2[X]$ désigne l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2, à coefficients réels.
On pose $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P'(2) = P(1)\}$ et $f \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R} \\ P \mapsto P'(2) - P(1) \end{cases}$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2) On pose $P = a + bx + cx^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. A quelle condition sur (a, b, c) a-t-on $P \in F$?
3) Déterminer une base de F et sa dimension.
4) Montrer que f est linéaire. Quel est le lien entre f et F ?
5) Retrouver $\dim F$ en utilisant la question précédente.

∞∞∞