L2 MASS - EMA 43

Partiel n° 5
Lundi 22 Mai

Durée : 2 heures

Aucun document autorisé - Calculatrice interdite.

Chaque candidat doit, en début d'épreuve, porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage ***après*** *avoir été pointé. Il devra en outre porter le numéro de son groupe de TD sur chacune des copies, intercalaires, ou pièces annexées.*

I. Soit $E = \mathbb{R}[X]_2$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2, et $F = \{P \in E \mid \deg P \leq 1\}$.
Pour $P, Q \in E$ on pose :

$$\varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1).$$

Il est évident que φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.

1) Donner l'expression de la forme quadratique $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ associée à φ. Montrer que φ est définie positive.

Dans la suite on munit E du produit scalaire défini par φ.

2) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ de E suivant le procédé de Cram-Schmidt.

3) En utilisant la question précédente, trouver une base orthonormale de F.

4) Calculer le projeté orthogonal sur F du polynôme X^2.

II. Soit $f : (u,v) \longmapsto f(u,v)$ une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, et soit $g\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = f(x^2, y^2)$.
Montrer que g est de classe C^2, en explicitant toutes ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en fonction de celles de f.

III. Soit $f\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = y^3 \sin\dfrac{x}{y}$ si $y \neq 0$ et $f(x,y) = 0$ si $y = 0$.

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, en explicitant toutes ses dérivées partielles.

2) Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathcal{O} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$.

3) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(1, \dfrac{1}{k\pi}\right)$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

IV. Soit $f\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = \big(\sin(xy), e^{y+z}\big)$

1) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et expliciter sa matrice jacobienne $J_{(x,y,z)}(f)$.

2) Soit $g\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (u,v) \longmapsto g(u,v) = \big(g_1(u,v), g_2(u,v), g_3(u,v)\big)$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
Expliciter la matrice jacobienne de $f \circ g$, $J_{(u,v)}(f \circ g)$.

※ ⋆ ◇ ※ ⋆ ◇ ※