

Plan du cours

Chapitre 1. Structures fondamentales de l'analyse

02/10

I Nombres réels

Notations : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{N}^* , \mathbb{R}_+^* , \mathbb{C} , \in .

a) Algèbre

Symboles \sum et \prod , factorielle. Identités remarquables. Racines d'un trinôme du second degré.

b) Ordre

Notations \max , \min , $|\cdot|$. Intervalles. Inégalité triangulaire. Partie entière.

09/10

II Fonctions

Notations.

a) Opérations provenant de \mathbb{R}

Opérations sur les fonctions. Parité, périodicité. Comparaison entre fonctions. Monotonie.

b) Opérations ensemblistes

Image directe et réciproque. Composition. Fonction bijective, fonction réciproque.

III Fonctions usuelles

a) Fonctions trigonométriques

Définition géométrique, symétries, périodicité. Dérivées, Graphes. Formules d'addition, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, formules d'Euler, $|\sin x| \leq |x|$.

b) Logarithme et exponentielle

Primitive de $1/x$. Produit et inverse. $\text{Log}(1+x) \leq x$. Limites de $\text{Log } x$, $x \text{Log } x$ et $(\text{Log } x)/x$. Réciproque de Log . Dérivée. Somme et opposé. Limites de $\exp x$, $x \exp x$, $(\exp x)/x$. Graphes.

c) Fonctions puissance

Puissances entières sur $\mathbb{R} / \mathbb{R}^*$, racines $n^{\text{ièmes}}$ sur $\mathbb{R} / \mathbb{R}_+$. Définition générale sur \mathbb{R}_+^* . $\exp x = e^x$. Règles de calcul. Graphes.

d) Fonctions hyperboliques

Définition, symétries. Graphe.

Chapitre 2. Limites, continuité, dérivée

16/10

I Limites

a) Quantificateurs

Introduction aux quantificateurs, négation. Point d'accumulation d'une partie de \mathbb{R} . Parties majorées, minorées, non majorées.

b) Définition

Définition intuitive, définition mathématique. Limites à droite et à gauche. Limites en l'infini, limites infinies. Premières propriétés.

c) Algèbre

Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Formes indéterminées. Limite d'une fonction composée.

d) Ordre

Passage à la limite dans les inégalités. Théorème des gendarmes.

18/10

II Continuité et dérivation

a) Continuité

Limite en un point du domaine de définition. Continuité en un point. Exemples : continuité, discontinuités de première et seconde espèce.

b) Dérivée

Taux d'accroissement, dérivée. Dérivable \Rightarrow continue. Exemple : $x \mapsto \sqrt{x}$.

c) Algèbre

Règles de calcul avec les dérivées.

23/10

Chapitre 3. Développements limités

I Définition et utilisation

a) Interprétation graphique de la dérivée

Caractérisation de la dérivée par un DL. Interprétation graphique. Idée des développements limités, approximations du graphe de cos.

b) Définition

Définition d'un développement limité. Unicité des coefficients. Exemple : $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$. Développements de exp, cos, sin, $(1+x)^\alpha$.

c) Algèbre

Troncature, somme, produit, composée, quotient. Remarque sur l'ordre et les termes significatifs. Cas des fonctions paires, impaires.

25/10

II Formule de Taylor-Lagrange

a) La formule

Dérivées d'ordre supérieur, fonctions de classe C^n . Théorème de Taylor-Lagrange, application aux DLs. Exemples : exp, cos.

b) Quelques démonstrations

Admis : image continue d'un compact. Variations, extrema et dérivée. Lemme de Rolle, Formule de Taylor-Lagrange. Accroissements finis, variations et dérivée.

30/10

Chapitre 4. Fonctions de plusieurs variables

06/11

c) Définition

L'ensemble \mathbb{R}^n . Fonction réelle sur \mathbb{R}^n . Opérations, composition. Graphe. Cas des fonctions affines.

d) Dérivées partielles

Définition. Exemple. Plan tangent. Cas $n = 1$, $n = 2$.

07/11

e) Dérivées secondes

Fonctions dérivées partielles. Dérivées secondes, notation. Théorème de Schwarz.

f) Extrema

Extrema globaux et locaux. Condition nécessaire, points critiques. Condition suffisante. Desin : minimum local, point col.