Université de Caen **2006-2007**
UFR de Sciences **L2 MASS**
Mathématiques **EMA 43**

Partiel n° 3

lundi 19 mars 2007

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A.
2. Montrer que A est diagonalisable, sans rechercher de base de vecteurs propres.

Soit P la matrice de changement de base de la base canonique vers une base de vecteurs propres de A.
On ne cherchera pas à calculer P.

3. Donner une formule pour A^n en fonction de P et d'une matrice diagonale à préciser.

On note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée M.
Rappelons qu'on a $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ pour toutes matrices carrées M, N.

4. Calculer $\mathrm{Tr}(A^n)$ pour tout n, à l'aide des question précédentes.

Exercice 2. On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par les égalités suivantes :

$$\varphi_1(x, y, z) = y - z, \quad \varphi_2(x, y, z) = -x - y + z, \quad \varphi_2(x, y, z) = x + y.$$

Montrer que $\mathcal{C} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.
Déterminer la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ dont $\mathcal{C}$ est la base duale.

Exercice 3. On munit le plan $\mathbb{R}^2$ de la distance euclidienne d_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble $H_n \subset \mathbb{R}^2$ défini comme suit : $H_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > nx\}$.

1. On fixe n. Montrer que H_n est ouvert, par deux méthodes différentes.
2. On considère $Q = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$.
   a. Montrer que $Q = \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_+^*$.
   b. Montrer que Q n'est ni ouvert ni fermé.

Exercice 4. Soit d_2 la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^2$, et $O = (0, 0)$ l'origine. Pour P, $Q \in \mathbb{R}^2$ on note

$$d(P, Q) = \begin{cases} d_2(P, Q) & \text{si } O,\ P \text{ et } Q \text{ sont alignés} \\ d_2(P, O) + d_2(O, Q) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. En admettant que d est une distance, représenter les boules ouvertes $B_d((0, 0), 1)$, $B_d((2, 0), 1)$, $B_d((2, 0), 3)$ relatives à d.
2. Montrer que d est une distance.
   Pour l'inégalité triangulaire entre P, Q et R on traitera deux cas parmi les suivants :
   a. les droites (OP), (OQ) et (OR) sont confondues ;
   b. elles sont deux-à-deux distinctes ;
   c. (OP) et (OQ) sont confondues, mais pas avec (OR) ;
   d. (OP) et (OR) sont confondues, mais pas avec (OQ).