Université de Caen
UFR de Sciences
Mathématiques

2006-2007
L2 MASS
EMA 43

Partiel n° 6

lundi 14 mai 2007

Chaque candidat doit en début d'épreuve porter son nom dans le coin de la copie qu'il cachera par collage après la signature de la feuille d'émargement. Il devra en outre porter son numéro de place sur chacune de ses copies ou intercalaires.

durée : 2 heures
Aucun document, aucune calculatrice ne sont autorisés.

Exercice 1. Soit a un nombre réel fixé, et M la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 4a+5 & 4a-4 & 2-2a \\ 4a-4 & 4a+5 & 2-2a \\ 2-2a & 2-2a & a+8 \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire usuel.
On considère l'endomorphisme de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $N = \dfrac{1}{9} M$.

1. On se place dans le cas $a = 0$.
   a. Montrer que f est une projection.
   b. Sans calcul, dire pourquoi f est une projection orthogonale.
   c. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$.
   d. Déterminer une équation de $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$, puis de $\operatorname{Im} f$.
   e. Donner, sans calcul mais en justifiant, le polynôme caractéristique de f.

On revient au cas général.

2. Montrer sans calcul que f est diagonalisable.
3. Calculer le coefficient de M^2 situé à l'intersection de la première ligne et de la première colonne.
4. À l'aide de la question précédente, donner une condition nécessaire sur a pour que f soit :
   – une projection,
   – une symétrie.
5. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f est :
   – une projection orthogonale différente de l'identité,
   – une symétrie orthogonale différente de l'identité,

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à x et y sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0, 0)$, et les calculer.
3. Montrer que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ existent, et les calculer.
4. L'application f est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie comme suit :

$$f(x, y) = (x + e^y, x - y).$$

1. Montrer que l'application $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto t + e^t$ est bijective.
   On tracera pour cela le tableau de variations de h, en y faisant figurer les limites en $\pm\infty$.
2. Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est bijective.

On note g l'application réciproque de f.

3. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa matrice jacobienne en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que g est de classe C^1.