

FEUILLE N° 5

Exercice 1. Soit a un nombre réel, et soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) - 2xy + 2xz + 2yz \quad \text{pour tout vecteur } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

- On suppose que $a = 0$. Soit D la droite de \mathbb{R}^3 engendré par le vecteur $v = (2, 2, 1)$. Trouver une base de D^\perp . Les sous-espaces vectoriels D et D^\perp sont-ils supplémentaires ?
- Montrer que la forme quadratique q est définie positive si et seulement si $a > 2$.
- On suppose que $a = 4$. Soit P le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $9x - y + 6z = 0$. Trouver une base de P^\perp .

Exercice 2. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par la formule

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + z^2 + 2xy + 4yz.$$

- Montrer que q est une forme quadratique en donnant l'expression de la forme bilinéaire φ associée.
- Montrer que φ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .
Dans la suite de l'exercice on munit \mathbb{R}^3 de ce produit scalaire.
- Calculer les quantités $\|(0, 0, 1)\|$, $\|(-2, 1, -2)\|$ et $(0, 0, 1) \cdot (-2, 1, 0)$.
Donner l'équation du plan P orthogonal au vecteur $(0, -1, 2)$.
- Trouver une base de P , puis une base orthonormale de P .
- À l'aide des questions précédentes, et sans calcul, donner une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz.$$

- Montrer que la forme bilinéaire symétrique associée à q est un produit scalaire.
- Orthonormaliser la base canonique.
- Donner l'équation du plan orthogonal au vecteur $(0, 1, 2)$.

Exercice 4. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

- Montrer que la forme bilinéaire associée à q définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .
Calculer les quantités suivantes : $\|(0, 0, 1)\|$, $\|(3, 1, 0)\|$, $(3, 1, 0) \cdot (-4, 0, 1)$, $\|(0, 4, 3)\|$.
- Orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3) .
Soit P l'orthogonal du vecteur $e_1 + e_2$. Trouver une base orthonormale de P .
- Soit Q l'orthogonal du vecteur e_3 .
 - Écrire l'équation de Q .
 - Trouver une base de Q , puis une base orthonormale de Q .
 - Donner une base orthonormale (v_1, v_2, v_3) de (\mathbb{R}^3, q) telle que $Q = \text{Vect}(v_2, v_3)$.

Exercice 5. Soit $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy + 2xz - 6yz$.

- Montrer que la forme bilinéaire associée à q définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 .
Orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3) .
- Soit P le plan orthogonal au vecteur $(1, 1, 0)$. Quel est le projeté orthogonal de e_1 sur P ?
- Calculer les coordonnées des projetés orthogonaux de e_2 et e_3 sur P .
- Écrire la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P .
Est-elle symétrique ? Pourquoi ? Quelles sont ses valeurs propres ?

Exercice 6. On munit \mathbb{R}^4 du produit scalaire usuel. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs de \mathbb{R}^4 définis par

$$u_1 = (2, 1, 0, 2), \quad u_2 = (0, 1, 0, 1), \quad u_3 = (2, 1, 3, 1), \quad u_4 = (1, 1, 1, 1).$$

- Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de \mathbb{R}^4 .
- Orthonormaliser la base (u_1, u_2, u_3, u_4) selon le procédé de Gram-Schmidt.
- Soit P le plan de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs u_1 et u_2 .
Trouver la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P .

Exercice 7. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Montrer que f est une projection dont on déterminera l'image et le noyau.
- f est-elle une projection orthogonale pour le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^3 ?
- Montrer que la forme quadratique suivante définit un produit scalaire sur \mathbb{R}^3 :

$$q(x, y, z) = x^2 + 11y^2 + 6z^2 - 6xy + 2xz - 2yz.$$

- Montrer que f est une projection orthogonale si on munit \mathbb{R}^3 de ce produit scalaire.
- Donner une autre forme quadratique q pour laquelle ce résultat reste valable.

Exercice 8. Soient n un entier positif et $E = \mathbb{R}[X]_n$. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

- Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .
Calculer $\|X - \frac{1}{2}\|$ et $(2X - 1) \cdot X^2$.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in E$ tel que

$$\forall P \in E \quad \int_0^1 H(t)P(t)dt = P'(0).$$

- On considère le cas $n = 2$.
 - Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ selon le procédé de Gram-Schmidt.
 - Calculer le polynôme H .

Exercice 9. Soit E un espace euclidien.

- Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a l'égalité

$$2(u \cdot v) = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

- En déduire que pour tous $u, v \in E$, on a l'égalité de la médiane :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

- En déduire par ailleurs que pour tous $u, v \in E$ on a

$$u \perp v \iff \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

Exercice 10. Pour tout nombre réel a on s'intéresse à la forme quadratique q_a sur \mathbb{R}^3 définie par

$$q_a(x, y, z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + a^2z^2 + 4xy - 2ayz.$$

- Montrer que q_a est définie-positive, pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- Déterminer pour tout $a \in \mathbb{R}$ un vecteur directeur de l'orthogonal au plan d'équation $z = 0$.