

FEUILLE N^O 6

Exercice 1. Calculer les dérivées partielles des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{x}{x^2 + y^2}; & f_2(x, y) &= \text{Log}(x + \sqrt{x^2 + y^2}); & f_3(x, y) &= \text{Log}(\tan \frac{x}{y}); \\ f_4(x, y) &= (xy)^z; & f_5(x, y) &= \frac{xy^2}{x + y}; & f_6(x, y) &= \text{Log}(1 + \frac{y}{x}). \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(x + g(y^2, x)).$$

Montrer que f est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en fonction de celles de g .

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(x, y, z) = f(x^2 - y^2, y^2 - z^2, z^2 - x^2).$$

Montrer que g est de classe C^1 et que pour tout réel t on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial y}(t, t, t) + \frac{\partial g}{\partial z}(t, t, t) = 0.$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

- Montrer que la fonction f est de classe C^1 et calculer les dérivées partielles de f .
- Soit $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = x^{x^x}$.
 Montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = |x| \sin(x^2 + y)$.

- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- En quels points de \mathbb{R}^2 la fonction f admet-elle des dérivées partielles par rapport à x ? à y ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$, que l'on calculera.
 Est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 7. Montrer à l'aide la définition que les applications suivantes sont différentiables en tout point :

$$f_1 : (x, y) \mapsto y + xy^2, \quad f_2 : (x, y, z) \mapsto x^2 + xy + z^2.$$

Expliciter la différentielle de f_1 en $(1, 0)$ et celle de f_2 en $(1, 0, 1)$.

Indication : si p et q sont deux entiers tels que $p + q \geq 2$, alors $\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h^p k^q}{\|(h, k)\|} = 0$.

Exercice 8. Montrer, en calculant des dérivées partielles, que les applications suivantes sont différentiables :

$$f_1(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2), \quad f_2(x, y, z) = \cos(xy) + x \sin(z).$$

Expliciter la différentielle de f_1 en $(1, 0)$ et celle de f_2 en $(1, 0, \frac{\pi}{2})$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer successivement :

- que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, et calculer ses dérivées partielles,
- que f admet l'application linéaire nulle comme différentielle en $(0, 0)$,
- que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

- a. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 , sachant que $|\sin t| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, en explicitant ses dérivées partielles.
- c. Montrer que f admet des dérivées partielles nulles en $(0, 0)$.
- d. Quelle relation vérifierait $f(x, x)$ si f était différentiable en $(0, 0)$?
Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$ et en déduire que f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Exercice 11. On pose $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\}$ et on définit une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } (x, y) \in U \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin U. \end{cases}$$

- a. Montrer que U est un ouvert de \mathbb{R}^2 et que f est de classe C^1 sur U .
- b. Montrer que f est continue sur \mathbb{R}^2 .
- c. Montrer que f a des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .
- d. Montrer que f est différentiable en tout point de \mathbb{R}^2 .
- e. Montrer que f n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 12. Soit f la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $f(x, y) = |x^3 - y^3|^{2/3}$.

- a. Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .
- b. Soit $U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 > 0\}$ et $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 < 0\}$.
(i) Montrer que U_1 et U_2 sont des ouverts de \mathbb{R}^2 .
(ii) Montrer que g est de classe C^1 sur U_1 et U_2 .
- c. Montrer que g n'est pas différentiable en $(1, 1)$.

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x^3 - \sin y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- b. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et les calculer.
- c. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, x)$ pour tout $x \neq 0$ et en déduire que f n'est pas de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 .
- d. En considérant $f(x, -x)$, montrer que f n'est même pas différentiable en $(0, 0)$.