

EXERCICES DE RÉVISION

[Nombres complexes]

Exercice 1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + (1 + i)z + 6 - 2i = 0.$$

On pourra utiliser le fait que $24^2 + 10^2 = 26^2$.

Exercice 2. Résoudre l'équation suivante :

$$z^3 + 2(1 - 2i)z^2 - (4 + 5i)z - 3 + i = 0.$$

On pourra vérifier que i est une des solutions.

[Systèmes linéaires]

Exercice 3. Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x & + & z & + & t & = & 0 \\ ax & + & y & + & (a-1)z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & + & at & = & 0 \\ 2x & + & ay & + & z & + & 2t & = & 0. \end{cases}$$

Exercice 4. Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} -2x & + & (a + 3i)y & = & 0 \\ (1 + i)x & + & a(1 - 2i)y & = & 2. \end{cases}$$

[Polynômes et fractions rationnelles]

Exercice 5. Déterminer le PGCD D des polynômes suivants :

$$A = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 5X^2 - X - 2, \quad B = X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 8X + 4.$$

Trouver deux polynômes U et V tels que $AU + BV = D$.

Exercice 6. Décomposer en éléments simples :

$$F = \frac{(i-1)X^2 + (2+3i)X + 3}{X^3 + 2(1-i)X^2 + (2-5i)X - 3 + i}.$$

La DFI du dénominateur est donnée par l'exercice 2.

Exercice 7. Soit $P = X^3 - 3X^2 + 3X + 1$ et $Q = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 8X + 4$

- Calculer le PGCD de Q et Q' .
- Factoriser Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle P/Q .