

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 1. Calculer le PGCD unitaire de $A = X^6 - 6X^4 - 5X^3 - X^2 - 14$ et $B = X^5 - 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 4X - 4$. Écrire la relation de Bézout correspondante.

Exercice 2. Soit $A = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 2X + 1$, $B = X^3 + 2X^2 - 1$ et R, S deux polynômes fixés. On cherche l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ dont les restes dans les divisions euclidiennes par A et B valent R et S .

- Montrer que le PGCD unitaire de A et B vaut $D = X + 1$ et écrire la relation de Bézout correspondante.
- Y a-t-il une solution P du problème quand $R = X^2 - 6$ et $S = -5X$?
On pourra écrire la forme des divisions euclidiennes de P par A et B et faire leur différence.
- En utilisant le a., trouver une solution P_0 du problème pour $R = X^2 - 6$ et $S = 5X$.
- Montrer que P est solution du problème si et seulement si A et B divisent $P_0 - P$.
- Le fait que A et B divisent $P_0 - P$ équivaut au fait que $M = AB/D$ (PPCM de A et B) divise $P_0 - P$.*
Calculer le polynôme M et effectuer la division euclidienne de P_0 par M .
- Quelle est la solution de degré minimal ?

Exercice 3. *Examen, janvier 2006.*

On cherche à déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(S) \quad \begin{cases} P(3) = 1, & P'(3) = 1 \\ P(5) = 4, & P'(5) = 1. \end{cases}$$

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme.
Montrer qu'on a $P(3) = 1$ et $P'(3) = 1$ si et seulement si il existe un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - 3)^2 A + (X - 2).$$

Montrer qu'on a $P(5) = 4$ et $P'(5) = 1$ si et seulement si il existe un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X - 5)^2 A + (X - 1).$$

- Montrer que P vérifie (S) si et seulement si il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$(1) \quad P = (X - 3)^2 A + (X - 2) \quad \text{et}$$

$$(2) \quad (X - 3)^2 A - (X - 5)^2 B = 1.$$

- En écrivant une relation de Bézout, trouver deux polynômes A_0, B_0 vérifiant (2).
Calculer le polynôme P correspondant.
- Montrer que si A et B vérifient (2), alors $(X - 3)^2 / (B - B_0)$ et $(X - 5)^2 / (A - A_0)$.
- Quel est l'ensemble des solutions (A, B) de (2) ?
Quel est l'ensemble des solutions P de (S) ?