# Algèbre 3 : Applications de la diagonalisation

**Exercice 1.** On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 5 \\ -10 & -9 & -4 \\ -6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Soit $D$ la matrice diagonale ayant 0, 1 et $-1$ comme termes diagonaux.
Montrer qu'il existe une matrice inversible $P \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.
*On ne calculera ni $P$ ni $P^{-1}$.*

b. Montrer qu'on a $A^n = PD^nP^{-1}$ et calculer $D^n$ pour tout $n$.

c. Montrer sans calcul qu'on a $A^m = A$ pour tout entier naturel impair $m$, et $A^m = A^2$ pour tout entier naturel pair non nul $m$.

d. Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en distinguant 2 cas.

**Exercice 2.** On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de $A$.

b. Montrer que $A$ est diagonalisable, sans rechercher de base de vecteurs propres.

Soit $P$ la matrice de changement de base de la base canonique vers une base de vecteurs propres de $A$.
*On ne cherchera pas à calculer $P$.*

c. Donner une formule pour $A^n$ en fonction de $P$ et d'une matrice diagonale à préciser.

On note $\mathrm{Tr}(M)$ la trace d'une matrice carrée $M$.
*Rappelons qu'on a $\mathrm{Tr}(MN) = \mathrm{Tr}(NM)$ pour toutes matrices carrées $M$, $N$.*

d. Calculer $\mathrm{Tr}(A^n)$ pour tout $n$, à l'aide des question précédentes.

**Exercice 3.** On considère deux suites $(u_n)$, $(v_n)$ définies par les valeurs $u_0 = 7$, $v_0 = 4$ et le système de récurrence suivant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 11u_n - 18v_n \\ v_{n+1} = 6u_n - 10v_n. \end{cases}$$

On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a. Trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que le système ci-dessus s'écrive $X_{n+1} = AX_n$.

b. Trouver une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose $Y_n = P^{-1}X_n$ et on appelle $w_n$, $x_n$ ses composantes : $Y_n = P^{-1}X_n = \binom{w_n}{x_n}$.
*Dans cet exercice on n'a pas besoin de calculer $P^{-1}$.*

c. Déterminer $w_0$ et $x_0$ en résolvant un système linéaire.

d. Montrer que la suite $(Y_n)$ vérifie l'équation de récurrence $Y_{n+1} = DY_n$.
En déduire deux équations de récurrence simples vérifiées par $w_n$ et $x_n$.

e. Calculer $u_n$ et $v_n$ pour tout $n$.

**Exercice 4.** Déterminer les suites $(u_n)$, $(v_n)$, $(w_n)$ données par $u_0 = -3$, $v_0 = 1$, $w_0 = 0$ et

$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = 3u_n + 2w_n. \end{cases}$$

On suivra la démarche suivante :

a. écrire le système sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$,

b. diagonaliser $A$ sous la forme $A = PDP^{-1}$, sans calculer $P^{-1}$,

c. écrire la relation de récurrence vérifiée par $Y_n = P^{-1}X_n$,

d. calculer $Y_0$, puis $Y_n$ pour tout $n$, et enfin revenir à $X_n$.

On notera $a_n$, $b_n$, $c_n$ les trois coordonnées du vecteur colonne $Y_n$.