

FICHE D'EXERCICES N° 1

Calculs avec les réels

[*Fractions*]

Exercice 1. Écrire sous forme d'un quotient (factorisé et simplifié) les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2 - \frac{x-3}{x+1}, & B(x) &= \frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2}, \\ C(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}, & D(x) &= x-3 - \frac{x-3}{x+1}, \\ E(x) &= \frac{9}{x-1} - x+1, & F(x) &= \frac{4}{x} - \frac{2x-3}{x+1} - 7, \\ G(x) &= \frac{x-2(x-2)}{(x+3)(x-2)}, & H(x) &= \frac{x+1}{x+3} - \frac{x}{x-2}. \end{aligned}$$

Préciser pour quelles valeurs de x ces expressions sont définies, avant et après simplification.

Exercice 2. Simplifier les fractions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^3b^2}{a^2b} \cdot \frac{ab^3}{a^3b^2}, & B &= \frac{3a^2}{\frac{5b}{2a^3}}, & C &= \frac{a+b}{\frac{c}{(a+b)^2}}, & D &= \frac{a - \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{a}}, \\ E &= \frac{28a^3b}{21ab^2}, & F &= \frac{30a^2b^2}{25a^2b - 20ab^2}, & G &= \frac{a^2 + ab - 2b^2}{ab} \cdot \frac{5ab^2}{a+2b} \cdot \frac{1}{5(a-b)}. \end{aligned}$$

On précisera pour quelles valeurs de a et b ces expressions sont définies, avant simplification.

[*Identités remarquables*]

Exercice 3. Développer et réduire les expressions $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)(a-b)$. Puis, en utilisant ces résultats, développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-1)(-x+2) + (2x+1)^2, & B(x) &= (x-3)^2 - 4x(x+1), \\ C(x) &= (2x+5)^2 - (5x+2)(5x-2) - (1-x)(3+x). \end{aligned}$$

Exercice 4. Simplifier les fractions suivantes en utilisant des identités remarquables :

$$\frac{a}{a^2-1} + \frac{2}{a^2+2a+1}, \quad \frac{\frac{a^2-b^2}{3a+3b}}{\frac{2ab}{9a-9b} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}, \quad \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}, \quad \frac{a^2-b^2}{a^2+ab}.$$

On précisera pour quelles valeurs de a et b ces expressions sont définies, avant simplification.

Exercice 5. En utilisant les identités remarquables, lorsque c'est possible, factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= 49 - 25x^2, & B(x) &= 2x^2 - 12x + 18, & C(x) &= 16 + 49x^2 + 56x, \\ D(x) &= 4x^2 + 36, & E(x) &= x^2 + 20x + 25, & F(x) &= (-x+2)^2 - 4x^2, \\ G(x) &= 9x^2 - 1 + (x-3)(3x-1), & H(x) &= 4x^2 - 1 - (3x+5)(2x-1), & I(x) &= -x^2 + 16x - 64. \end{aligned}$$

[*Exposants*]

Exercice 6. Écrire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

$$a = 4^{-3}, \quad b = 5^{-2}, \quad c = 8^{-5}, \quad d = (2^{-3})^{-2}, \quad e = 5^{-3} \cdot 5^{-1}, \quad f = 10^{-6}, \quad g = \frac{1}{2^{-3}},$$
$$h = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}, \quad i = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}, \quad j = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{2}{3}\right)^{-6}, \quad k = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, \quad l = \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^7}{\left(\frac{7}{9}\right)^{-5}}.$$

Exercice 7. Écrire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

$$a = 16^{1/2}, \quad b = 81^{3/4}, \quad c = 27^{4/3}, \quad d = 64^{1/3}, \quad e = \left(\frac{25}{4}\right)^{3/2}, \quad f = 8^{-1/3}, \quad g = 32^{-3/5},$$
$$h = \left(2^{-1/3}\right)^{-21}, \quad i = (0,064)^{-5/3}, \quad j = 5^{-4} \cdot 5^2, \quad k = (5^{-1} + 5^0)^{-1}, \quad l = 7^{-1/2} \cdot 7^{5/2}, \quad m = \frac{3^{-7}}{3^{-5}}.$$

Exercice 8. Écrire comme quotients de polynômes les quantités :

$$A(x) = (5x)^{-3}, \quad B(x, y) = \left(\frac{8x^6}{y^3}\right)^{2/3}, \quad C(x) = \left(\frac{81x^4}{(x^2 + 2x + 1)^2}\right)^{-1/4}, \quad D(x, y) = \left(\frac{32y^{10}}{x^5}\right)^{-2/5}$$

[*Radicaux*]

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes :

$$a = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - \sqrt{3}, \quad b = 3\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5},$$
$$c = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}, \quad d = 3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} + 5\sqrt{18},$$
$$e = -3\sqrt{5} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{125}, \quad f = 5\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{8},$$
$$g = 4\sqrt{12} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50}, \quad h = \sqrt{8} + \sqrt{48} + \sqrt{32} + \sqrt{12}.$$

Exercice 10. Développer et simplifier :

$$a = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2), \quad b = 3(2\sqrt{2} - 1), \quad c = 2(\sqrt{3} - 1) + 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1),$$
$$d = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1), \quad e = (2\sqrt{2} + 3)(3\sqrt{2} - 1), \quad f = (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}).$$

Exercice 11. Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}, \quad b = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, \quad c = \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, \quad d = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{10}},$$
$$e = \frac{5}{2 + \sqrt{11}}, \quad f = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}, \quad g = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, \quad h = \frac{2}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

Exercice 12. Écrire les nombres suivants sans radical :

$$a = \sqrt[3]{\frac{27}{64}}, \quad b = \sqrt[3]{5} \sqrt[3]{25}, \quad c = \sqrt[4]{16}, \quad d = \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}, \quad e = \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{32}},$$
$$f = \frac{\sqrt[3]{2} \sqrt[5]{64^3} \sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[5]{16} \sqrt[3]{16^4} \sqrt[20]{2048}}, \quad g = \frac{\sqrt[5]{4} \sqrt{8} (\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}.$$

Exercice 13. Simplifier les expressions suivantes : $\frac{\sqrt{a}}{a^{1/6} \sqrt[3]{a}}, \quad \frac{(a+1)\sqrt{a}}{a^{7/6} \sqrt[3]{a}}.$