

FICHE D'EXERCICES N° 3

Études de fonctions

Toutes les fonctions considérées dans cette fiche sont des fonctions d'une variable réelle.

[Généralités]

Exercice 1. Calculer :

- les images des nombres $\frac{5}{6}$ et 2 par les fonctions $f : x \mapsto \frac{5}{6x+5}$ et $g : x \mapsto \frac{-10}{3x+40}$;
- les images des nombres $-\frac{5}{6}$ et $\frac{-7}{-5}$ par les fonctions $f : x \mapsto \frac{12}{18x+15}$ et $g : x \mapsto -\frac{4}{5}x - \frac{28}{15}$;
- les images des nombres $\frac{2}{5}$ et $-\frac{3}{7}$ par les fonctions $f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto \frac{2}{x}$ et $h : x \mapsto \sqrt{x}$;
- les antécédents des nombres $\frac{14}{9}$ et $\frac{10}{21}$ par les fonctions $f : t \mapsto \frac{5}{12}t + \frac{1}{3}$ et $g : x \mapsto \frac{3}{4}x - \frac{5}{14}$;
- les antécédents des nombres $-\frac{4}{9}$ et $\frac{2}{25}$ par les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{x}$;
- les antécédents des nombres $\frac{5}{6}$ et $-\frac{4}{7}$ par les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : x \mapsto \frac{2}{x} + 1$;
- les antécédents des nombres $\frac{12}{27}$ et 1 par les fonctions $f : x \mapsto \frac{1+x}{x-5}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x-1/2}$.

Exercice 2. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 d(x) = \sqrt{2x^2 - 2x - 4}, & e(x) = \frac{2x}{x-1} + \sqrt{x}, & f(x) = \log(4x^2 + 4x + 1), \\
 g(x) = \sqrt{x-2} \log(6-x), & h(x) = \frac{\log(2x-1)}{x+2}, & i(x) = \frac{2x}{1-|x-2|} \sqrt{4-|x|}, \\
 j(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}, & k(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}}, & l(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \quad m(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}, \\
 n(x) = \log(x+1) - \log(x), & o(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right), & p(x) = \log(4-x^2) \sqrt{x-4}.
 \end{array}$$

[Dérivation]

Exercice 3. Déterminer la dérivée et le nombre dérivé en 2 de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 d(x) = -5\sqrt{x}, & e(t) = 2t^3 - 3t^2 + 5t - 1, & f(x) = (2x+1)(3x^2+x+1), \\
 g(x) = (-x^3+2)(2\cos x + \sin x), & h(x) = x\sqrt{2-x}, & i(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x} - 1, \\
 j(x) = \frac{\sin(\pi x) - 2}{3 + \cos(\pi x)}, & k(x) = \frac{-4x+2}{x-2}, & l(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}, \\
 m(x) = (1+x^2)e^x, & n(x) = \log\left(\frac{1+x}{2+x}\right), & o(x) = \frac{1+\log(x)}{1+e^x}.
 \end{array}$$

Exercice 4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 d(x) = (\sin x)^3, & e(x) = \tan(5x), & f(x) = e^{x^2}, & g(x) = 1 - 2(\cos x)^2, \\
 h(x) = \log(3x), & i(x) = \log(\sin(5x)), & j(x) = \cos\left(\frac{2x+1}{x-1}\right), & k(x) = \frac{e^{2x}-e^x+1}{2e^x+1}, \\
 l(x) = \tan(\log x), & m(x) = \sqrt{2+\log x}, & n(x) = \cos\sqrt{2x+1}, & o(x) = \log(\cos(\exp x)).
 \end{array}$$

[Variations]

Exercice 5. Pour chacune des fonctions suivantes : calculer la fonction dérivée, étudier son signe puis tracer le tableau de variations sur l'intervalle I .

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto x^2 + x - 2 \text{ sur } I = [-3, 2]; & g : x &\mapsto x^3 - 3x + 2 \text{ sur } I = [-1, 2]; \\ h : x &\mapsto 2x^4 - 3x^2 + 1 \text{ sur } I = [-2, 2]; & a : b &\mapsto \frac{b-1}{2+b} \text{ sur } I = [-2, 3/2]; \\ b : x &\mapsto \frac{x}{x^2+1} \text{ sur } I = [-3, 3]; & c : x &\mapsto \sqrt{-3x} \text{ sur } I = [-12, 6]. \end{aligned}$$

Exercice 6. Déterminer les extremums des fonctions suivantes sur les intervalles précisés :

$$\begin{aligned} e : x &\mapsto \frac{3}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{5}{4} \text{ sur } I = [-1, 3]; & f : x &\mapsto \frac{2x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} \text{ sur } I = [3/2, 4]; \\ g : x &\mapsto 2\sqrt{x^2 - 9} - 3x \text{ sur } I = [2, 5]; & h : x &\mapsto \frac{4x^2 + 3}{(x-1)^2} \text{ sur } I = [-3, 6]. \end{aligned}$$

[Limites]

Exercice 7. Calculer les limites suivantes en factorisant les termes dominants :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{27x^3 + 2x + 3}{x^{18} - 14x + 2}, & m &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-10x^5 + 2x^3}{15x^4 + 20x^2}, & n &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^9 + x^4 - 2x^3}{x^{17} - x^7 + x^3}, \\ o &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^9 - x^4 - 2x^2}{x^7 - 3x^4 + 2x^3}, & p &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}, & q &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^4 + x - 1}{(x-1)^3 + (x-1)^2}, \\ r &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3 + 2(x-1)^2}{(x-1)^2 + (x-1)^3}, & s &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 3}, & t &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + x + 1}, \\ u &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}, & v &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|x^4 + x^3 - 16x}{1 - x - 12x^5}, & w &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x}{1 - x - 12x^5}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer les limites suivantes en se ramenant en 0 :

$$\begin{aligned} l &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x - 3}, & m &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 4x}, & n &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4}, \\ o &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2}{x^4 + 2x^3 - 2x - 1}, & p &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x^2 + 4x + 4)\sqrt{2-x}}, & q &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sin(\pi x)}{x^2 + 4x - 5}, \\ r &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)\sqrt{x^2 + 4x + 3}}{x^3 - 3x - 2}, & s &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x + \cos x - 2}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

[Tangentes, asymptotes]

Exercice 9. Déterminer les équations des tangentes aux graphes des fonctions suivantes aux points précisés :

- $f : x \mapsto x^2 + 3x + 2$ aux points d'abscisses 0 et $-3/2$;
- $f : x \mapsto x \cos(\pi x)$ aux points d'abscisses 0, $1/2$ et $3/2$;
- $f : x \mapsto \exp(x^2 - 2x + 1)$ aux points d'abscisses 0, 1 et 2;
- $f : x \mapsto (x+1)^{-2}\sqrt{x}$ aux points d'abscisses 0 et 1.

Illustrer par des dessins.

Exercice 10. Déterminer les équations des asymptotes en $+\infty$ aux graphes des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 4}{x}, \quad g(x) = \frac{4x - 6}{x + 2}, \quad h(x) = \frac{5x^2 - 6x + 4}{x - 1}, \quad i(x) = \frac{2x^3 - 3x}{1 - x^2}, \quad j(x) = \frac{x^3 + 4}{x + 2}.$$

Exercice 11. Étudier les fonctions suivantes et tracer leur graphe :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}, \quad g(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad h(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$