

FICHE D'EXERCICES N  1

Calculs avec les réels

[*Fractions*]

Exercice 1.  crire sous forme d'un quotient (factorisé et simplifié) les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}, & B(x) &= x - 3 - \frac{x-3}{x+1}, \\ C(x) &= \frac{x-2(x-2)}{(x+3)(x-2)}, & D(x) &= \frac{x+1}{x+3} - \frac{x}{x-2}. \end{aligned}$$

Préciser pour quelles valeurs de x ces expressions sont définies, avant et après simplification.

Exercice 2. Simplifier les fractions suivantes :

$$A = \frac{a^3 b^2}{a^2 b} \cdot \frac{ab^3}{a^3 b^2}, \quad B = \frac{3a^2}{\frac{5b}{2a^3}}, \quad C = \frac{a+b}{\frac{c}{(a+b)^2}}, \quad D = \frac{a - \frac{1}{b}}{1 - \frac{1}{a}}.$$

On précisera pour quelles valeurs de a et b ces expressions sont définies, avant simplification.

Exercice 3. Simplifier les fractions suivantes en utilisant des identités remarquables :

$$A = \frac{a}{a^2-1} + \frac{2}{a^2+2a+1}, \quad B = \frac{\frac{a^2-b^2}{3a+3b}}{\frac{2ab}{9a-9b} \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2 b^2}}, \quad C = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b} - \frac{a}{b}}, \quad D = \frac{a^2-b^2}{a^2+ab}.$$

[*Développements et factorisations*]

Exercice 4. Développer et réduire les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= (x-1)(-x+2) + (2x+1)^2, & B(x) &= (x-3)^2 - 4x(x+1), \\ C(x) &= (2x+5)^2 - (5x+2)(5x-2) - (1-x)(3+x), & D(x,y) &= (x-y+1)(x+y-1), \\ E(x,y) &= (2x+y-2)(x+2y+2), & F(x) &= (x-1)(x+2)(x-3). \end{aligned}$$

Exercice 5. En utilisant les identités remarquables, lorsque c'est possible, factoriser les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A(x) &= 49 - 25x^2, & B(x) &= 2x^2 - 12x + 18, & C(x) &= 16 + 49x^2 + 56x, \\ D(x) &= 4x^2 + 36, & E(x) &= x^2 + 20x + 25, & F(x) &= (-x+2)^2 - 4x^2, \\ G(x) &= 9x^2 - 1 + (x-3)(3x-1), & H(x) &= 4x^2 - 1 - (3x+5)(2x-1), & I(x) &= -x^2 + 16x - 64. \end{aligned}$$

[*Exposants*]

Exercice 6.  crire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

$$\begin{aligned} a &= 4^{-3}, & b &= 5^{-2}, & c &= 8^{-5}, & d &= (2^{-3})^{-2}, & e &= 5^{-3} \cdot 5^{-1}, & f &= 10^{-6}, \\ g &= \frac{1}{2^{-3}}, & h &= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}, & i &= \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}, & j &= \left(-\frac{2}{3}\right)^4 \left(-\frac{2}{3}\right)^{-6}, & k &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}, & l &= \left(\frac{3}{7}\right)^7 / \left(\frac{7}{9}\right)^{-5}. \end{aligned}$$

Exercice 7.  crire sous forme de fraction et sans exposants les nombres suivants :

$$\begin{aligned} a &= 16^{1/2}, & b &= 81^{3/4}, & c &= 27^{4/3}, & d &= 64^{1/3}, & e &= \left(\frac{25}{4}\right)^{3/2}, & f &= 8^{-1/3}, \\ g &= (2^{-1/3})^{-21}, & h &= (0,064)^{-5/3}, & i &= 5^{-4} \cdot 5^2, & j &= (5^{-1} + 5^0)^{-1}, & k &= 7^{-1/2} \cdot 7^{5/2}, & l &= \frac{3^{-7}}{3^{-5}}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Écrire comme quotients de polynômes les quantités :

$$A(x) = (5x)^{-3}, \quad B(x, y) = \left(\frac{8x^6}{y^3}\right)^{2/3}, \quad C(x) = \left(\frac{81x^4}{(x^2 + 2x + 1)^2}\right)^{-1/4}, \quad D(x, y) = \left(\frac{32y^{10}}{x^5}\right)^{-2/5}.$$

[Radicaux]

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a &= 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}, & b &= 3\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{32} + 5\sqrt{18}, \\ c &= -3\sqrt{5} + 2\sqrt{80} - 4\sqrt{125}, & d &= 5\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{8}, \\ e &= 4\sqrt{12} + 5\sqrt{8} - \sqrt{50}, & f &= \sqrt{8} + \sqrt{48} + \sqrt{32} + \sqrt{12}. \end{aligned}$$

Exercice 10. Développer et simplifier :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{3}(\sqrt{3} + 2), & b &= 3(2\sqrt{2} - 1), & c &= 2(\sqrt{3} - 1) + 2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1), \\ d &= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1), & e &= (2\sqrt{2} + 3)(3\sqrt{2} - 1), & f &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Exercice 11. Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$\begin{aligned} a &= \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}, & b &= \frac{1 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}, & c &= \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}, & d &= \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{10}}, \\ e &= \frac{5}{2 + \sqrt{11}}, & f &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 2}, & g &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}, & h &= \frac{2}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Exercice 12. Écrire les nombres suivants sans radical :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{27}{64}}, & b &= \sqrt[3]{5}\sqrt[3]{25}, & c &= \sqrt[4]{16}, & d &= \frac{\sqrt[5]{96}}{\sqrt[5]{3}}, \\ e &= \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{32}}, & f &= \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt[5]{64^3}\sqrt[4]{8^5}}{\sqrt[5]{16}\sqrt[3]{16^4}\sqrt[20]{2048}}, & g &= \frac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}})^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Exercice 13. Simplifier les expressions suivantes : $\frac{\sqrt{a}}{a^{1/6}\sqrt[3]{a}}, \quad \frac{(a+1)\sqrt{a}}{a^{7/6}\sqrt[3]{a}}.$

[Logarithme]

Exercice 14. Calculer en fonction de $\log 2$ et $\log 3$:

$$\begin{aligned} a &= \log(1, 5), & b &= \log(16), & c &= \log(\sqrt[3]{9}), & d &= \log(2\sqrt{2}), & f &= \log(0, 25 \times e), \\ g &= \log\left(\frac{9}{8}\right), & h &= \log(36e^2), & i &= \log(4, 5), & j &= \log\left(\frac{12}{e^{5/3}}\right). \end{aligned}$$

Exercice 15. Écrire les expressions suivantes avec un seul log, lorsque c'est possible :

$$\begin{aligned} A(x) &= \log(x^2 - 1) - \log(x + 1), & B(x) &= \log(x + 2) + \log(x - 2), \\ C(x) &= \frac{\log(x(x + 1))}{\log(x(x + 2))}, & D(x) &= (\log x)^2 - 2\log(x) + 1, \\ E(x) &= \log(x^2 + 2x + 1) - \log(2x + 1), & F(x) &= \log(x^2 + 2x + 1) - \log(x + 1), \\ G(x) &= \log(2x) \times \log(3x), & H(x) &= \frac{(\log x)^2 - (\log 2)^2}{\log(2x)}. \end{aligned}$$