

FICHE D'EXERCICES N O 2

Équations, inéquations

Toutes les équations et inéquations de cette fiche sont à résoudre dans l'ensemble des nombres réels.

[Équations du premier degré]

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

(a) $\frac{x}{2} + 2 = 5$, (b) $\frac{x}{4} + \frac{2x}{3} = 5$, (c) $3,75 = 0,8 + 0,5 \times (x - 1)$,
(d) $2 + \frac{1}{x+2} = \frac{7}{x+2}$, (e) $\frac{5}{x-5} + 6 = \frac{x}{x-5}$, (f) $1 + \frac{4}{3x+4} = \frac{-3x}{3x+4}$, (g) $x + 2 = \frac{x^2 - x - 6}{x + 1}$,
(h) $(x + 3)(x - 6) = (x + 1)(x + 7)$, (i) $(x + 2)(x + 3) = x^2 - x - 6$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, où x est l'inconnue et a , b sont des paramètres. On discutera selon la valeur des paramètres.

(a) $\frac{3x}{2} - a = x + 3a$, (b) $a(x - 3) = 2x + b$, (c) $a(x - b) = 2x + 3$, (d) $(b + 2)(x - 3) = 3b + 6$,
(e) $(a - 1)(3 - x) = x - ax$, (f) $\frac{x + a}{x - a} = 1$, (g) $\frac{a + x - 2}{a - x} = 1$,
(h) $\frac{a + 3}{a - 2} = \frac{x}{a^2 - 4}$, (i) $\frac{2x + a}{x - 2} = b$, (j) $\frac{ab - b + bx}{1 - a - x} = 2$, (k) $\frac{2}{x} + ax = (ax + 1) \frac{x - 2}{x}$.

[Inéquations du premier degré]

Exercice 3. Résoudre les inéquations suivantes, et représenter l'ensemble des résultats sur la droite réelle :

(a) $3x - 2 < 7$, (b) $x + 2 > 7x - 1$, (c) $3 - x \leq -4$, (d) $-3x \geq -12$,
(e) $10(x + 1) < x - 4$, (f) $\frac{3x + 7}{5} < 2x - 1$, (g) $\frac{2x - 1}{-3} \geq -1$, (h) $\frac{2}{x} < 4$,
(i) $\frac{3}{x} \geq 6$, (j) $\frac{x + 2}{x + 1} > 2$, (k) $\frac{1}{x - 2} \leq 1$, (l) $\frac{x^2}{x - 2} \leq x + 3$,
(m) $(x + 2)^2 < (x + 2)(x - 1)$, (n) $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x + 1}$, (o) $\frac{x + 1}{x + 2} > \frac{x - 2}{x - 1}$.

Exercice 4. Résoudre les inéquations suivantes en dessant des tableaux de signes :

(a) $(3x - 5)(-2x - 4) > 0$, (b) $(x - 5)(x + 1) < 0$, (c) $(2x + 3)(5 - x)x \leq 0$,
(d) $(-2x + 1)(4 + 2x)(3x - 2) \geq 0$, (e) $(4x - 5)(x + 2) - (x + 2)(3x - 1) \leq 0$,
(f) $x^2 \geq 4x$, (g) $\frac{4x - 8}{x - 3} < 0$, (h) $\frac{2x + 3}{x + 1} \geq 0$.

Exercice 5. Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue x et de paramètre a . On discutera selon la valeur du paramètre.

(a) $2x + a \leq x - 5a$, (b) $ax - 3 \leq x + 2a$, (c) $(a - 1)(x - a) < 0$,
(d) $\frac{ax + 2}{x - 1} \leq a$, (e) $(x - 2a)(a + 2x) > 0$.

Exercice 6. Résoudre les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des résultats sur la droite réelle :

- (a) $|x - 2| \leq 4$, (b) $|x - 2| \geq 1$, (c) $|3x + 5| > 2$, (d) $|2x - 1| < 3$,
 (e) $|x - 1| \leq |x - 3|$, (f) $|x - 2| > |x + 4|$, (g) $|x + 3| \leq 2x$, (h) $|x + 1| < x - 3$,
 (i) $\frac{x + 2}{|x - 1|} \geq 0$, (j) $\frac{x + 2}{|x - 1|} \geq 2$, (k) $\left| \frac{x - 3}{x - 2} \right| < 1$, (l) $\left| \frac{x + 1}{x + 2} \right| \geq 2$,
 (m) $|(2x - 1)(x + 3)| > 2x^2 + 3$, (n) $|(x - 1)(x + 2)| \leq x^2 + 2$,
 (o) $|3x + 2| \leq |x + 1|$, (p) $|x - 1| < 2 \times |3 - x|$.

[Équations du second degré]

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes :

- (a) $6x^2 + 5x - 4 = 0$, (b) $x^2 + 4x + 4 = 0$, (c) $x^2 + 3x + 8 = 0$, (d) $x^2 + 2x - 3 = 0$,
 (e) $x^3 + x = 2x^2$, (f) $x^3 + 2x^2 - 6x = 0$, (g) $x^4 - 8x^2 + 15 = 0$, (h) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$,
 (i) $x^{-1} + x^{-2} = 6$, (j) $\frac{5}{x + 4} - \frac{3}{x - 2} = 4$, (k) $\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x}$, (l) $\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{x} + 1$.

Exercice 8. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue x et de paramètres a, b . On discutera selon la valeur des paramètres.

- (a) $x^2 + 2ax = b^2 - a^2$, (b) $(ax - bx)^2 = x(b - a)$, (c) $ax^2 + 2ax + a + 1 = 0$, (d) $x + \frac{1}{x} = a$.

Exercice 9. Factoriser les polynômes P suivants en recherchant des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + 3x + 2, & B(x) &= 3x^2 + 3x - 6, & C(x) &= -2x^2 + 4x + 6, & D(x) &= 2x^2 - 3x, \\ E(x) &= x^3 - 5x^2, & F(x) &= 2x^3 - 5x^2 + x + 2, & G(x) &= 3x^3 - 8x^2 - 5x + 6, & H(x) &= x^3 + x - 2, \\ I(x) &= 6x^4 - x^3 - 8x^2 + x + 2, & J(x) &= 2x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

À partir de F , on pourra commencer par vérifier que 1 ou -1 est racine.

[Inéquations du second degré]

Exercice 10. Résoudre les inéquations suivantes :

- (a) $x^2 + x - 2 > 0$, (b) $5x - 6 - x^2 < 0$, (c) $2x^2 + 13x - 7 \geq 0$, (d) $-5x^2 - 30x - 48 < 0$,
 (e) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$, (f) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$, (g) $x(6 - x) \leq 2x - 5$, (h) $x^3 - 5x^2 + 6x \leq 0$,
 (i) $x > \frac{1}{x}$, (j) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1} < 0$, (k) $\frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 - 12x + 32} > 0$, (l) $3x - 2 \geq \frac{1}{x}$.

Exercice 11. Résoudre les inéquations suivantes et représenter l'ensemble des solutions sur la droite réelle.

- (a) $|x^2 + x - 2| > 1$, (b) $|x^2 + x + 1| \leq 3$, (c) $|x^2 - x - 6| \leq 4$, (d) $|x + 2| + \left| \frac{1}{x} + 2 \right| > 5$.

[Logarithme et exponentielle]

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $e^{x+3} = 1$, (b) $\log(2x - 3) = 5$, (c) $\log(2x) = 2 \log(x)$,
 (d) $\log(x^2 - 1) + 2 \log(2) = \log(4x - 1)$, (e) $\log((x - 3)(x + 1)) = \log(x^2 - 6)$,
 (f) $(\log x)^2 + 2 \log(x) - 3 = 0$, (g) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$,
 (h) $e^{3x} = 4$, (i) $e^{2x} - 3 = 4e^{-2x}$, (j) $\log(x) - 2 \log(x - 4) = -\log(2)$.

Exercice 13. Résoudre les inéquations suivantes dans \mathbb{R} :

- (a) $e^{2x+1} > 1$, (b) $\log(x + 3) \leq 0$, (c) $e^{x-5} > 0$, (d) $e^{3x} < e^{x-1}$,
 (e) $\log(2 - x^2) \geq \log(2x + 4)$, (f) $e^{2x} - 5e^x + 6 < 0$, (g) $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$,
 (h) $e^{2x} - 3e^x + 2 \geq 0$, (i) $2 \log(x + 1) > \log(4x)$.