

## NORMES ET DISTANCES

[Distances]

**Exercice 1.** Soit  $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction nulle en 0 et croissante.

On dit que  $\theta$  est *sous-additive* si  $\theta(u + v) \leq \theta(u) + \theta(v)$  pour tous  $u, v \in \mathbb{R}_+$ .

- a. (i) Montrer que si  $\theta$  est dérivable et  $\theta'$  est décroissante, alors  $\theta$  est sous-additive.  
 (ii) Montrer que si  $\theta$  est sous-additive, on a  $\theta(u) > 0$  pour  $u > 0$ .  
 (iii) Vérifier que  $\theta_1 : u \mapsto \min(u, 1)$  et  $\theta_2 : u \mapsto u/(1 + u)$  sont sous-additives.
- b. On suppose que  $\theta$  est sous-additive. Soit  $(E, d)$  un espace métrique.  
 Montrer que  $d' = \theta \circ d$  est une distance sur  $E$ .
- c. On prend  $E = \mathbb{R}$ , muni de la distance usuelle  $d$ . On note  $d'_1$  et  $d'_2$  les distances sur  $\mathbb{R}$  associées à  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .  
 (i) Soit  $p, q$  deux entiers relatifs distincts. Que vaut  $d'_1(p, q)$ ?  
 (ii) Les distances  $d'_1$  et  $d'_2$  sont-elles équivalentes à  $d$ ?

**Exercice 2.** On considère  $X = \mathbb{R}^2$  et on pose, pour  $(x, y), (x', y') \in X$  :

$$d((x, y), (x', y')) = \begin{cases} |y' - y| & \text{si } x = x', \\ |x' - x| + |y| + |y'| & \text{si } x \neq x'. \end{cases}$$

- a. Montrer que  $d$  est une distance.
- b. Montrer que  $d((x, y), (0, 0)) = N_1(x, y)$ .  
 La distance  $d$  est-elle équivalente à la distance associée à  $N_1$ ? Est-elle associée à une norme?
- c. Représenter la boule ouverte  $B((x, y), r)$ . On distinguera les cas  $r \geq |y|$ ,  $0 < r < |y|$ .

**Exercice 3.** Soit  $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\mathbb{N}^*$ .

On munit  $\mathbb{N}^*$  de la distance usuelle  $d(a, b) = |b - a|$ .

Pour  $A \in X$  et  $k \in \mathbb{N}^*$  on note  $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* \mid d(n, A) \leq k\}$ .

Pour  $A, B \in X$  on pose  $\delta(A, B) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A \subset B_k \text{ et } B \subset A_k\}$ .

- a. Montrer que  $d(n, A) = k \Rightarrow \exists a \in A \ d(n, a) = k$ . Est-vrai dans tout espace métrique?  
 Donner des exemples de parties  $A, B, C \in X$  telles que  $d(A, B) = 0$ ,  $A \neq B$ , et  $d(A, C) > d(A, B) + d(B, C)$ .
- b. Montrer que  $A \subset B \Rightarrow A_k \subset B_k$  pour tout  $k$ , et que  $(A_k)_l = A_{k+l}$ .
- c. Montrer que  $\delta$  est une distance sur  $X$ .  
 Donner des exemples de parties  $A, B, C \subset \mathbb{N}^*$  pour lesquelles l'inégalité triangulaire est une égalité.

**Exercice 4.** Soit  $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\mathbb{N}^*$ .

- a. Rappelons qu'on note  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  la différence symétrique de  $A, B \in X$ .  
 Montrer que  $A = B$  ssi  $A \Delta B = \emptyset$ .
- b. Pour tous  $A, B \in X$  on pose  $\delta(A, B) = (\min(A \Delta B))^{-1}$ , en convenant que  $\delta(A, A) = 0$ .  
 Montrer que  $\delta(A, B) < 1/n \iff A \cap [1, n] = B \cap [1, n]$ .
- c. Montrer que  $\delta$  est une distance ultramétrique sur  $X$ .  
 Est-elle équivalente à celle de l'exercice précédent?

[Espaces de dimension finie]

**Exercice 5.** On fixe des réels  $a, b$  et on pose  $N(x, y) = a|x| + b|y|$  pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

- a. À quelle condition sur  $a, b$  l'application  $N$  est-elle une semi-norme sur  $\mathbb{R}^2$ ? une norme?
- b. Lorsque  $N$  est une norme, montrer qu'elle est équivalente à la norme euclidienne canonique.

**Exercice 6.** On note  $N_2$  la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $q : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$  est une forme quadratique définie-positive sur  $\mathbb{R}^2$ , on note  $N_q$  la norme associée.

- a. Montrer que  $2|xy| \leq x^2 + y^2$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- b. Rappeler à quelles conditions sur  $a, b, c$  la forme quadratique  $q$  est définie-positive.
- c. Expliquer pourquoi on peut trouver  $a' \in ]0, a[$ ,  $c' \in ]0, c[$  tels que  $b^2 \leq 4a'c'$ .
- d. Montrer que  $N_2$  et  $N_q$  sont équivalentes.

**Exercice 7.** On pose  $N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$  et  $P(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$ , pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . On note  $N_2$  la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^2$ .

- a. Montrer que  $N, P$  sont des normes sur  $\mathbb{R}^2$ .
- b. Montrer que  $N(x, y) \geq \frac{1}{2}|y|$  pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
- c. Montrer que  $N$  et  $P$  sont équivalentes à  $N_2$ .

**Exercice 8.** On considère  $E = \mathbb{Q}^2$  et on pose  $N(x, y) = |x + y\sqrt{2}|$  pour tout  $(x, y) \in E$ .

- a. Montrer que  $N$  est une norme sur le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $E$ .
- b. On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'il existe un entier relatif  $a_n$  tel que  $N(a_n, 10^n) < 1$ .
- c. La norme  $N$  est-elle équivalente à la norme  $N_1$  ?

**Exercice 9.** Calculer la norme des applications linéaires suivantes :

- $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), (x, y) \mapsto 2x + 3y,$
- $g : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), (x, y, z) \mapsto \pi x + y - \pi z,$
- $h : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty), (x, y, z) \mapsto (x + y, 2y + z),$
- $i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1), (x, y) \mapsto (x + y, x - y).$

[Espaces de suites]

**Exercice 10.** On note  $E$  l'ensemble des suites réelles bornées sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $(\sum a_n)$  une série convergente à termes positifs. Pour  $x = (x_n)_n \in E$  on note  $N(x) = \sum a_n |x_n|$ .

- a. Montrer que  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , et que  $N$  est une semi-norme sur  $E$ .
- b. À quelle condition  $N$  est-elle une norme sur  $E$  ?  
On pourra noter  $e_p$  la suite  $(\delta_{p,n})_n$  et calculer  $N(e_p)$  pour tout  $p$ .
- c. On suppose que  $N$  est une norme. Est-elle équivalente à la norme  $N_\infty : x \mapsto \sup_n |x_n|$  ?  
Obtient-on une norme équivalente à  $N$  si on remplace  $(a_n)_n$  par  $(a_n/n)_n$  ? par  $(\text{sh } a_n)_n$  ?

**Exercice 11.** Soit  $E$  l'espace des suites complexes presque nulles sur  $\mathbb{N}$ , muni de la norme  $N_2$ .

On fixe une suite bornée  $(a_n)_n$  et on considère les endomorphismes  $D, M, S$  définis comme suit :

$$D((x_n)_n) = (x_{n+1})_n, \quad M((x_n)_n) = (a_n x_n)_n, \quad \text{et} \quad S((x_n)_n) = (y_n)_n \quad \text{où} \quad y_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Montrer que  $D, M, S$  sont bornés et calculer leurs normes d'opérateur.

[Espaces de fonctions]

**Exercice 12.** On considère l'espace  $E = \mathbb{R}[X]$  et on pose, pour  $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$  :

$$N(P) = \sup_i |a_i| \quad \text{et} \quad N'(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

On définit par ailleurs des endomorphismes de  $E$  en posant

$$f(P) = P', \quad g(P) = (X + 1)P \quad \text{et} \quad h_\alpha(P) = P(\alpha), \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- a. Montrer que  $N$  et  $N'$  sont des normes sur  $E$ .
- b. Les applications  $f, g, h_1, h_2$  sont-elles bornées relativement à  $N$  ? à  $N'$  ?  
Le cas échéant, calculer leurs normes d'opérateurs.
- c. Les normes  $N, N'$  sont-elles équivalentes ?

**Exercice 13.** On considère l'espace  $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  et les applications de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  définies comme suit :

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad P_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad P_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

- a. Montrer que  $P_1$  et  $P_2$  sont des normes.  
Rappeler comment on démontre que  $f' = 0 \implies f$  constante.
- b. Montrer que les normes  $P_1$  et  $P_2$  sont équivalentes. Sont-elles équivalentes à  $N_\infty$  ?
- c. Pour lesquelles des ces normes la forme linéaire  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(f) = f'(0)$  est-elle bornée ?  
Lorsque  $\varphi$  est bornée, montrer que  $\|\varphi\| = 1$  dans  $E'$ . Cette norme est-elle atteinte ?

**Exercice 14.** On considère l'espace vectoriel  $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  et le sous-espace  $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ . Pour tout élément  $f \in E$  on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

- Montrer que  $N$  est une norme sur  $E$ , et que  $N'$  est une semi-norme.  $N'$  est-elle une norme ?
- Résoudre l'équation différentielle  $f + f' = 0$ .  
En déduire que la restriction de  $N'$  à  $F$  est une norme.
- On fixe  $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$ . Résoudre l'équation différentielle  $f + f' = g$ . On pourra utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire rechercher  $f$  sous la forme  $f(t) = \lambda(t)e^{-t}$ . Y a-t-il une solution dans  $F$  ?
- En utilisant la question précédente, montrer que les normes  $N$  et  $N'$  sont équivalentes sur  $F$ .

**Exercice 15.** Calculer la norme des formes linéaires

$$\varphi : f \mapsto \int_{-1}^1 f(t)dt, \quad \psi : f \mapsto \int_0^1 f(t)dt - \int_{-1}^0 f(t)dt,$$

définies sur l'espace  $C([-1, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme de la convergence uniforme. Ces normes sont-elles atteintes ?

**Exercice 16.** On considère l'espace  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  muni de la norme de la convergence uniforme. On dit que  $f \in E$  est positive, et on note  $f \geq 0$ , si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . On dit qu'une forme linéaire  $\varphi \in E^*$  est positive si  $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$ .

- Montrer qu'une forme linéaire positive est bornée. On pourra considérer  $g : x \mapsto \|f\| - f(x)$ .
- Appliquer ce qui précède à  $\varphi_1 : f \mapsto f(1)$  et  $\varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$ .  
Montrer directement que ces formes linéaires sont bornées.

[Espaces d'opérateurs]

**Exercice 17.** Si  $N, N'$  sont deux normes sur  $E = \mathbb{R}^n$ , on note  $\|M\|_{N \rightarrow N'}$  la norme d'opérateur d'une matrice  $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  vue comme application linéaire de  $(\mathbb{R}^n, N)$  vers  $(\mathbb{R}^n, N')$ .

- Montrer que  $\|M\|_{N_1 \rightarrow N_1} = \max_j \sum_i |m_{ij}|$ .
- Montrer que  $\|M\|_{N_\infty \rightarrow N_\infty} = \max_i \sum_j |m_{ij}|$ .
- Montrer que  $\|M\|_{N_\infty \rightarrow N_1} \leq \sum_{ij} |m_{ij}|$ .  
Donner un exemple de matrice  $M$  telle que cette inégalité soit une égalité, et un exemple tel qu'elle soit stricte.

**Exercice 18.** On munit  $\mathbb{R}^n$  de la norme  $N_2$ , et on note  $\|\cdot\|_{\text{op}} = \|\cdot\|_{N_2 \rightarrow N_2}$  la norme d'opérateur associée sur  $M_n(\mathbb{R})$ . On pose par ailleurs, pour  $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$  et  $\|A\|_2^2 = \text{Tr}({}^tAA)$ .

- Vérifier que  $(A, B) \mapsto (A|B)$  est une forme bilinéaire  $M_n(\mathbb{R})$ .
- Calculer  $(A|A)$  en fonction des coefficients de  $A = (a_{ij})$ .  
En déduire que la forme bilinéaire considérée est définie-positive.
- Montrer les inégalités  $\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_{\text{op}}$ . On pourra calculer la trace en utilisant une BON de  $\mathbb{R}^n$ .
- Quel argument permet de montrer sans calcul que  ${}^tAA$  est diagonalisable en BON ?  
Montrer que les valeurs propres de  ${}^tAA$  sont positives.
- En utilisant la question précédente, montrer que  $\|A\|_2^2$  est égal à la somme des valeurs propres de  ${}^tAA$ .
- De même, montrer que  $\|A\|_{\text{op}}^2$  est égal à la plus grande valeur propre de  ${}^tAA$ .
- Retrouver les inégalités de la question c.

**Exercice 19.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé non nul et  $u, v \in L'(E)$ . On suppose que  $u \circ v - v \circ u = \lambda \text{Id}$ .

- Montrer que  $u \circ v^{n+1} - v^{n+1} \circ u = \lambda(n+1)v^n$  pour tout  $n$ .
- Montrer qu'on a forcément  $\lambda = 0$ .
- On prend  $E = C^\infty([0, 1])$ , muni de la norme de la convergence uniforme  $N = \|\cdot\|_\infty$ .  
On pose  $u(f) = f'$  et  $v(f) = (t \mapsto tf(t))$ . Calculer  $u \circ v - v \circ u$ . Conclusion ?
- On conserve l'espace  $E$  et les endomorphismes  $u, v$  de la question précédente.  
On considère la norme  $N' : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$  sur  $E$ .  
Montrer que  $u$  et  $v$  sont bornés pour la norme  $\|\cdot\|_{N' \rightarrow N}$ . Conclusion ?