

NORMES ET DISTANCES

Exercice 1. Soit $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction nulle en 0, non identiquement nulle et croissante.

On dit que θ est *sous-additive* si $\theta(u+v) \leq \theta(u) + \theta(v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$.

- a. (i) Montrer que si θ est dérivable et θ' est décroissante, alors θ est sous-additive.
 (ii) Montrer que si θ est sous-additive et $\theta(u) = 0$ pour un certain $u > 0$, alors $\theta(v) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+$.
 (iii) Vérifier que $\theta_1 : u \mapsto \min(u, 1)$ et $\theta_2 : u \mapsto u/(1+u)$ sont sous-additives.
- b. On suppose que θ est sous-additive et non identiquement nulle.
 Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que $d' = \theta \circ d$ est une distance sur E .
- c. On prend $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle d . On note d'_1 et d'_2 les distances sur \mathbb{R} associée à θ_1 et θ_2 .
 (i) Soit p, q deux entiers relatifs distincts. Que vaut $d'_1(p, q)$?
 (ii) Les distances d'_1 et d'_2 sont-elles équivalentes à d ?

Exercice 2. On considère $X = \mathbb{R}^2$ et on pose, pour $(x, y), (x', y') \in X$:

$$d((x, y), (x', y')) = \begin{cases} |y' - y| & \text{si } x = x', \\ |x' - x| + |y| + |y'| & \text{si } x \neq x'. \end{cases}$$

- a. Montrer que d est une distance.
- b. Montrer que $d((x, y), (0, 0)) = N_1(x, y)$.
 La distance d est-elle équivalente à la distance associée à N_1 ? Est-elle associée à une norme?
- c. Représenter la boule ouverte $B((x, y), r)$. On distinguera les cas $r \geq |y|$, $0 < r < |y|$.

Exercice 3. (*examen 2012-2013*)

Soit n un entier fixé. On note X l'ensemble des applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$. Pour $f, g \in X$ on pose

$$d_\infty(f, g) = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |f(i) - g(i)|,$$

$$D(f, g) = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid f(i) \neq g(i)\} \quad \text{et} \quad d_H(f, g) = \text{card } D(f, g).$$

Ainsi, $d_H(f, g)$ est le nombre d'entiers $i \in \{1, \dots, n\}$ pour lesquels $f(i) \neq g(i)$.

- a. Montrer que d_∞ est une distance sur X .
- b. Montrer que $D(f, h) \subset D(f, g) \cup D(g, h)$ pour tous $f, g, h \in X$.
- c. Montrer que d_H est une distance sur X .

Exercice 4. Soit $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des sous-ensembles de \mathbb{N}^* . On munit \mathbb{N}^* de la distance usuelle $d(a, b) = |b - a|$ et on note $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ la « distance » associée entre deux parties de \mathbb{N}^* .

- a. Montrer que $d(n, A) = k \Rightarrow \exists a \in A \ d(n, a) = k$. Est-vrai dans tout espace métrique?
 Donner des exemples de parties $A, B, C \in X$ telles que $d(A, B) = 0$, $A \neq B$, et $d(A, C) > d(A, B) + d(B, C)$.

Pour $A \in X$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on note $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* \mid d(n, A) \leq k\}$.

Pour $A, B \in X$ on pose $\delta(A, B) = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid A \subset B_k \text{ et } B \subset A_k\}$.

- b. Montrer que $A \subset B \Rightarrow A_k \subset B_k$ pour tout k , et que $(A_k)_l = A_{k+l}$.
- c. Montrer que δ est une distance sur X .
 Donner des exemples de parties $A, B, C \subset \mathbb{N}^*$ pour lesquelles l'inégalité triangulaire est une égalité.

Exercice 5. Soit $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ l'ensemble des sous-ensembles de \mathbb{N}^* .

- a. Rappelons qu'on note $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la différence symétrique de $A, B \in X$.
 Montrer que $A = B$ ssi $A \Delta B = \emptyset$.
- b. Pour tous $A, B \in X$ on pose $\delta(A, B) = (\min(A \Delta B))^{-1}$, en convenant que $\delta(A, A) = 0$.
 Montrer que $\delta(A, B) < 1/n \iff A \cap [1, n] = B \cap [1, n]$.
- c. Montrer que δ est une distance sur X . Est-elle équivalente à celle de l'exercice précédent?

Exercice 6. On fixe des réels a, b et on pose $N(x, y) = a|x| + b|y|$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- a. À quelle condition sur a, b l'application N est-elle une semi-norme sur \mathbb{R}^2 ? une norme?

b. Lorsque N est une norme, montrer qu'elle est équivalente à la norme euclidienne canonique.

Exercice 7. On note N_2 la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^2 . Soit $q : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ est une forme quadratique définie-positive sur \mathbb{R}^2 , on note N_q la norme associée.

- Montrer que $2|xy| \leq x^2 + y^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Rappeler à quelles conditions sur a, b, c la forme quadratique q est définie-positive.
- Expliquer pourquoi on peut trouver $a' \in]0, a[, c' \in]0, c[$ tels que $b^2 \leq 4a'c'$.
- Montrer que N_2 et N_q sont équivalentes.

Exercice 8. On pose $N(x, y) = \max(|x|, |x + y|)$ et $P(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On note N_2 la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^2 .

- Montrer que N, P sont des normes sur \mathbb{R}^2 .
- Montrer que $N(x, y) \geq \frac{1}{2}|y|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- Montrer que N et P sont équivalentes à N_2 .

Exercice 9. On considère $E = \mathbb{Q}^2$ et on pose $N(x, y) = |x + y\sqrt{2}|$ pour tout $(x, y) \in E$.

- Montrer que N est une norme sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel E .
- On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un entier relatif a_n tel que $N(a_n, 10^n) < 1$.
- La norme N est-elle équivalente à la norme N_1 ?

Exercice 10. Calculer la norme des applications linéaires suivantes :

- $f : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(x, y) \mapsto 2x + 3y$,
- $g : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(x, y, z) \mapsto \pi x + y - \pi z$,
- $h : (\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, 2y + z)$,
- $i : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.

Exercice 11. On note E l'ensemble des suites réelles bornées sur \mathbb{R} . Soit $(\sum a_n)$ une série convergente à termes positifs. Pour $x = (x_n)_n \in E$ on note $N(x) = \sum a_n |x_n|$.

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et que N est une semi-norme sur E .
- À quelle condition N est-elle une norme sur E ?
On pourra noter e_p la suite $(\delta_{p,n})_n$ et calculer $N(e_p)$ pour tout p .
- On suppose que N est une norme. Est-elle équivalente à la norme $N_\infty : x \mapsto \sup_n |x_n|$?
Obtient-on une norme équivalente à N si on remplace $(a_n)_n$ par $(a_n/n)_n$? par $(\text{sh } a_n)_n$?

Exercice 12. Soit E l'espace des suites complexes presque nulles sur \mathbb{N} , muni de la norme N_2 .

On fixe une suite bornée $(a_n)_n$ et on considère les endomorphismes D, M, S définis comme suit :

$$D((x_n)_n) = (x_{n+1})_n, \quad M((x_n)_n) = (a_n x_n)_n, \quad \text{et} \quad S((x_n)_n) = (y_n)_n \quad \text{où} \quad y_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

Montrer que D, M, S sont bornés et calculer les normes d'opérateur de D et M .

Exercice 13. On considère l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ et on pose, pour $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in E$:

$$N(P) = \sup_i |a_i| \quad \text{et} \quad N'(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|.$$

On définit par ailleurs des endomorphismes de E en posant

$$f(P) = P', \quad g(P) = (X + 1)P \quad \text{et} \quad h_\alpha(P) = P(\alpha), \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Montrer que N et N' sont des normes sur E .
- Les applications f, g, h_1, h_2 sont-elles bornées relativement à N ? à N' ?
Le cas échéant, calculer leurs normes d'opérateurs.
- Les normes N, N' sont-elles équivalentes ?

Exercice 14. On considère l'espace $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et les applications de E dans \mathbb{R} définies comme suit :

$$N_\infty(f) = \|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad P_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty, \quad P_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty.$$

- Montrer que P_1 et P_2 sont des normes.
Rappeler comment on démontre que $f' = 0 \implies f$ constante.

- b. Montrer que les normes P_1 et P_2 sont équivalentes. Sont-elles équivalentes à N_∞ ?
 c. Pour lesquelles des ces normes la forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f) = f'(0)$ est-elle bornée ?
 Lorsque φ est bornée, montrer que $\|\varphi\| = 1$ dans E' . Cette norme est-elle atteinte ?

Exercice 15. On considère l'espace vectoriel $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ et le sous-espace $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$.
 Pour tout élément $f \in E$ on pose

$$N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N'(f) = \|f + f'\|_\infty.$$

- a. Montrer que N est une norme sur E , et que N' est une semi-norme. N' est-elle une norme ?
 b. Résoudre l'équation différentielle $f + f' = 0$.
 En déduire que la restriction de N' à F est une norme.
 c. On fixe $g \in C([0, 1], \mathbb{R})$. Résoudre l'équation différentielle $f + f' = g$. On pourra utiliser la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire rechercher f sous la forme $f(t) = \lambda(t)e^{-t}$. Y a-t-il une solution dans F ?
 d. En utilisant la question précédente, montrer que les normes N et N' sont équivalentes sur F .

Exercice 16. (partiel 2012-2013)

On considère l'espace vectoriel $E = C([0, \pi], \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues définies sur $[0, \pi]$. Pour $f \in E$ on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in [0, \pi]} |f(t)| \quad \text{et} \quad P(f) = \int_0^\pi |\sin(t)f(t)| dt.$$

- a. Montrer que P est une norme sur E .
 b. Les normes N_∞ et P sont-elles équivalentes ?
 On pourra considérer les fonctions $f_n : t \mapsto t^n / \pi^n$.

On considère les applications linéaires S et $D : E \rightarrow E$ définies par

$$S(f) = (t \mapsto f(\pi - t)) \quad \text{et} \quad D(f) = (t \mapsto f(t/2)).$$

- c. Montrer que S est un opérateur borné relativement à N_∞ (au départ et à l'arrivée).
 Déterminer la norme d'opérateur $\|S\|$ correspondante.
 d. Montrer que S et D sont des opérateurs bornés relativement à P (au départ et à l'arrivée).
 Montrer que la norme d'opérateur $\|D\|$ relative à P est comprise entre 1 et 4.

On considère la forme linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_0^\pi \cos(t)f(t) dt$.

- e. Montrer que φ est une forme linéaire bornée relativement à N_∞ .
 f. La forme linéaire φ est-elle bornée relativement à P ?
 On pourra considérer les fonctions $g_n : t \mapsto (\cos t)^n$. On admettra que $W_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt$ tend vers $\sqrt{\pi/2}$ quand n tend vers $+\infty$ (intégrales de Wallis).

Exercice 17. Calculer la norme des formes linéaires

$$\varphi : f \mapsto \int_{-1}^1 f(t) dt, \quad \psi : f \mapsto \int_0^1 f(t) dt - \int_{-1}^0 f(t) dt,$$

définies sur l'espace $C([-1, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme.
 Ces normes sont-elles atteintes ?

Exercice 18. On considère l'espace $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme. On dit que $f \in E$ est positive, et on note $f \geq 0$, si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. On dit qu'une forme linéaire $\varphi \in E^*$ est positive si $f \geq 0 \Rightarrow \varphi(f) \geq 0$.

- a. Montrer qu'une forme linéaire positive est bornée. On pourra considérer $g : x \mapsto \|f\| - f(x)$.
 b. Appliquer ce qui précède à $\varphi_1 : f \mapsto f(1)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \int_0^1 f$.
 Montrer directement que ces formes linéaires sont bornées.

Exercice 19. Si N, N' sont deux normes sur $E = \mathbb{R}^n$, on note $\|M\|_{N \rightarrow N'}$ la norme d'opérateur d'une matrice $M = (m_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ vue comme application linéaire de (\mathbb{R}^n, N) vers (\mathbb{R}^n, N') .

- Montrer que $\|M\|_{N_1 \rightarrow N_1} = \max_j \sum_i |m_{ij}|$.
- Montrer que $\|M\|_{N_\infty \rightarrow N_\infty} = \max_i \sum_j |m_{ij}|$.
- Montrer que $\|M\|_{N_\infty \rightarrow N_1} \leq \sum_{ij} |m_{ij}|$.

Donner un exemple de matrice M telle que cette inégalité soit une égalité, et un exemple tel qu'elle soit stricte.

Exercice 20. On munit \mathbb{R}^n de la norme N_2 , et on note $\|\cdot\|_{\text{op}} = \|\cdot\|_{N_2 \rightarrow N_2}$ la norme d'opérateur associée sur $M_n(\mathbb{R})$. On pose par ailleurs, pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, $(A|B) = \text{Tr}({}^tAB)$ et $\|A\|_2^2 = \text{Tr}({}^tAA)$.

- Vérifier que $(A, B) \mapsto (A|B)$ est une forme bilinéaire $M_n(\mathbb{R})$.
- Calculer $(A|A)$ en fonction des coefficients de $A = (a_{ij})$.
En déduire que la forme bilinéaire considérée est définie-positive.
- Montrer les inégalités $\|A\|_{\text{op}} \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_{\text{op}}$. On pourra calculer la trace en utilisant une BON de \mathbb{R}^n .
- Quel argument permet de montrer sans calcul que tAA est diagonalisable en BON ?
Montrer que les valeurs propres de tAA sont positives.
- En utilisant la question précédente, montrer que $\|A\|_2^2$ est égal à la somme des valeurs propres de tAA .
- De même, montrer que $\|A\|_{\text{op}}^2$ est égal à la plus grande valeur propre de tAA .
- Retrouver les inégalités de la question c.

Exercice 21. (partiel 2011-2012)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une application linéaire, et M sa matrice dans les bases canoniques. On munit \mathbb{R}^2 de la norme N_2 , \mathbb{R}^3 de la norme N_1 , et on note $\|f\|$ la norme d'opérateur associée pour f . Par ailleurs on pose

$$P(M) = |a| + |b| + |c| + |d| + |e| + |f| \quad \text{si} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}.$$

- Montrer que P est une norme sur $M_{3,2}(\mathbb{R})$.
- Exprimer $f(x, y)$ en fonction de a, b, c, d, e, f, x, y . En déduire que $\|f\| \leq P(M)$.
- On prend $f(x, y) = (x + y, 2x - y, x - y)$.
 - À l'aide de la question 2, donner un majorant pour $\|f\|$.
 - En calculant $f(4, -1)$ donner un minorant pour $\|f\|$.
- Cette question est moins facile.
On conserve la fonction f de la question 3.
 - Démontrer l'inégalité $|X| + |Y| + \frac{1}{2}|X + 3Y| \leq \sqrt{\frac{17}{2}}\sqrt{X^2 + Y^2}$, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}$.
 - En posant $X = x + y, Y = x - y$, montrer que $\|f\| = \sqrt{17}$.

Exercice 22. (partiel 2012-2013)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique (e_1, \dots, e_n) .

On considère sur E la norme $N_1(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et une norme quelconque $N : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Pour $f \in L(E)$ on note $P(f) = \|f\|_{N_1 \rightarrow N}$ la norme d'opérateur de f relativement à N_1 et N , et on pose

$$N'(f) = \sum_{i=1}^n N(f(e_i)).$$

- Montrer que N' est une norme sur $L(E)$.
- (i) Montrer que pour tout vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in E$ on a $N(f(x_1, \dots, x_n)) \leq N'(f) \sum_{i=1}^n |x_i|$.
(ii) Montrer que pour tout $f \in L(E)$ on a $P(f) \leq N'(f) \leq nP(f)$.
- Dans cette question on montre que les inégalités de la question 2b sont optimales.
 - Soit $v \in E$ tel que $N(v) = 1$. On considère l'endomorphisme $f : E \rightarrow E$ donné par $f(e_i) = v$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Déterminer $N'(f)$ et $P(f)$.
 - On considère l'endomorphisme $p : E \rightarrow E$ donné par $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, 0, \dots, 0)$. Déterminer $N'(p)$ et $P(p)$ en fonction de $N(e_1)$.
- Dans cette question on étudie un cas particulier. On prend $n = 3$ et $N = N_2$ donnée par

$$N_2(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

On considère $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par la formule $f(x, y, z) = (3y, 3x + z, x + 3z)$.
Montrer que $P(f) = \sqrt{10}$ et déterminer $N'(f)$.