

ESPACES COMPLETS

Exercice 1. L'ensemble \mathbb{N}^* est-il complet pour les distances suivantes ?

$$d_1(k, l) = |k - l|, \quad d_2(k, l) = \delta_{k \neq l}(1 + k^{-1} + l^{-1}), \quad d_3(k, l) = |k^{-1} - l^{-1}|.$$

Vérifier que $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*, k \mapsto k + 1$ est strictement contractante pour d_2 mais n'a pas de point fixe. On étend d_3 à $X = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ en posant $d_3(k, \infty) = d_2(\infty, k) = k^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. L'espace (X, d_3) est-il complet ?

Indications. On précisera quelles sont les suites convergentes et les suites de Cauchy pour d_1 et d_2 . Pour d_3 , on pourra s'inspirer de l'exercice précédent.

Exercice 2. Montrer que les espaces métriques (E, d) et espaces vectoriels normés (E, N) suivants sont complets.

- $E = \{n^2, n \in \mathbb{N}\}, d(k^2, l^2) = |k^2 - l^2|.$
- $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y \leq \cos(x + y)\}, d((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|.$
- $E = M_n(\mathbb{C}), N(A) = \sqrt{\text{Tr}({}^tAA)}.$
- $E = O_n(\mathbb{R}), d(A, B) = \sqrt{n - \text{Tr}({}^tAB)}.$
- $E = \{(x_i) \in \mathbb{R}^n \mid \sum x_i = 0\}, N((x_i)) = \sum_i |x_i|.$
- $E = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)^2 dt \leq 1\}, d(f, g) = \|f - g\|_\infty.$

Exercice 3. On fixe une énumération des rationnels : $\mathbb{Q} = \{r_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $r_n \neq r_m$ pour $n \neq m$. On considère $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on pose pour tous $n \in \mathbb{N}, x, y \in X$:

$$d_n(x, y) = \left| |x - r_n|^{-1} - |y - r_n|^{-1} \right|, \quad d'_n(x, y) = \frac{d_n(x, y)}{1 + d_n(x, y)} \quad \text{et}$$

$$d'(x, y) = |x - y| + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} d'_n(x, y).$$

- Vérifier rapidement que d_n, d'_n sont des pseudo-distances, et que d' est une distance sur X .
- Soit $(x_k)_k \in X^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy relativement à d' .
 - Montrer que (x_k) a une limite $x \in \mathbb{R}$ relativement à la distance usuelle.
 - Montrer que x appartient à X . On pourra considérer la suite $(|x_k - r_n|^{-1})_k$, pour n fixé.
 - Montrer que $d'(x_k, x_l)$ tend vers $d'(x_k, x)$ quand $l \rightarrow \infty$.
 - Montrer que (x_k) converge vers x relativement à d' .
- X est-il complet relativement à la distance usuelle ? à la distance d' ?
- Montrer que d' est topologiquement équivalente à la restriction de la distance usuelle de \mathbb{R} .
On cherchera, pour $x \in X$ et $\epsilon > 0$ fixé, un réel $\alpha > 0$ tel que $B_d(x, \alpha) \subset B_{d'}(x, \epsilon)$.

Exercice 4. On considère l'ensemble $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans $[0, 1]$, considérées comme fonctions de \mathbb{N} dans $[0, 1]$. Pour deux éléments $u, v \in E$ on pose

$$d(u, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|u(k) - v(k)|}{2^k} \quad \text{et} \quad d_\infty(u, v) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |u(k) - v(k)|.$$

- Quel résultat du cours permettent de montrer que (E, d_∞) est complet ?
- Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments $u_n \in E$. On suppose que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy pour d .
 - On fixe k . Montrer que la suite $(u_n(k))_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} .
 - Montrer qu'il existe un élément $v \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(k) = v(k)$ pour tout k .
 - Montrer que $(u_n)_n$ converge vers v dans (E, d) .
- On a ainsi montré que (E, d) est complet.
 Cela reste-t-il vrai si on considère l'ensemble des suites à valeurs dans $]0, 1[$?

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $E = C^1([-1, 1], \mathbb{R})$, et les normes sur E définies par

$$N(f) = \|f\|_\infty, \quad P(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty,$$

où on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

- On pose $f_n(t) = \sqrt{n^{-1} + t^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in [-1, 1]$.
 - Calculer $g(t) = \lim f_n(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$.
 - Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers g .
 - L'espace E est-il complet relativement à N ?

On rappelle le résultat suivant : si $(f_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 telle que $f_n(0)$ converge et $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g , alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f telle que $f' = g$.

- Montrer que E est complet relativement à P .

Exercice 6. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ de la norme définie par la formule $\|P\| = \sum_{i=0}^n |a_i|$, si $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$.

- Montrer que pour tout k , la forme linéaire $\varphi_k : P = \sum_{i=0}^\infty a_i X^i \mapsto a_k$ est continue.
- On note S_n les sommes partielles du développement en série entière de l'exponentielle. Montrer que $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E qui ne converge pas dans E .
- Soit $(P_n)_n$ une suite de polynôme telle que $\deg(P_n)$ ne tend pas vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un entier d et une sous-suite $(P_{n_k})_k$ telle que $\deg(P_{n_k}) \leq d$ pour tout k .
- Soit $(P_n)_n$ une suite de Cauchy dans E qui ne converge pas. Montrer que $\deg(P_n)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 7. Montrer qu'il existe un unique point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = (\sin x + 8 \cos y)/10 & \text{et} \\ y = (2 \cos x + 7 \sin y)/10. \end{cases}$$

On pourra montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bien choisie est uniformément strictement contractante relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pouvaient-on appliquer la même méthode avec la norme $\|\cdot\|_1$?

Exercice 8. Montrer qu'il existe un unique point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \sin(x + y) & \text{et} \\ y = \frac{1}{2} \cos(x - y). \end{cases}$$

On aura besoin de calculer la norme d'opérateur d'une matrice bien choisie, en munissant \mathbb{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_2$.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une application. On suppose qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ soit uniformément strictement contractante.

- Montrer que si x est point fixe de f^n , alors $f(x)$ est aussi point fixe de f^n .
- En déduire que f admet un point fixe. Montrer que ce point fixe est unique.

Exercice 10. (Rattrapage 2012-2013)

On munit \mathbb{R}^2 de la norme $N_\infty : (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|)$. On note $\bar{B} = \bar{B}(0, 1)$ la boule unité fermée de \mathbb{R}^2 relativement à N_∞ . On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (\arctan(x + y), 1 - x + y^2)$.

- Représenter \bar{B} sur une figure.
Montrer que \bar{B} , munie de la distance induite par N_∞ , est un espace complet.
- Montrer que pour tout $(x, y) \in \bar{B}$ on a $f(x, y) \in [-2, 2] \times [0, 3]$.
- Rappeler la valeur de la dérivée de la fonction \arctan en un point $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|$.
- Montrer que pour tous $(x, y), (x', y') \in \bar{B}$ on a $N_\infty(f(x, y) - f(x', y')) \leq 3N_\infty((x, y) - (x', y'))$.
- Montrer que le système suivant admet une unique solution dans \bar{B} :

$$(S) \quad \begin{cases} 4x & = & \arctan(x + y), \\ 4y & = & 1 - x + y^2. \end{cases}$$

On rappellera l'énoncé précis du théorème de point fixe utilisé.