

PROJECTIONS

Exercice 1.

- a. On considère dans \mathbb{R}^2 la droite D d'équation $ax + by = 0$, et $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Faire un dessin.
 Déterminer la distance minimale $d(P, D)$ de P à D .
- b. On considère dans \mathbb{R}^n l'hyperplan H d'équation $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et P un point de coordonnées y_1, y_2, \dots, y_n .
 Donner la formule du projeté orthogonal de P sur H^\perp , puis sur H . En déduire $d(P, H)$.

Exercice 2. Calculer de deux manières différentes la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale sur le sous-espace

$$F = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercice 3. Soit D la droite de \mathbb{R}^3 engendrée par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- a. Trouver une équation puis une base orthonormée de D^\perp .
- b. Écrire la matrice (dans la base canonique) des projections orthogonales P, Q sur D et D^\perp . $\frac{1}{14} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
- c. Vérifier que $P + Q = \text{Id}$ et $PQ = 0$.

Exercice 4. Soit $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorphisme donné (dans la base canonique) par :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que A est une projection orthogonale.
- b. Déterminer (en donnant des bases) l'image et le noyau de A . $\text{Ker } A = \mathbb{R}(1, 1, 1), \text{ Im } A = \mathbb{R}(1, -1, 0) \oplus \mathbb{R}(1, 0, -1)$
- c. Diagonaliser A .

Exercice 5. On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = b_1 \\ x + y - z = b_2. \end{cases}$$

- a. Que peut-on dire de l'ensemble des solutions ?
 On note H l'ensemble des solutions dans le cas $b_1 = b_2 = 0$.
- b. On prend $b_1 = 0, b_2 = 1$.
 - (i) Résoudre le système.
 - (ii) Soit X_1 une solution et P la projection orthogonale sur H .
 Montrer que $X_0 = X_1 - PX_1$ est la solution de norme minimale.
 - (iii) Faire les calculs.