

SÉRIES NUMÉRIQUES

Exercice 1. Déterminer la nature des séries données par les termes généraux suivants :

$$\begin{array}{lll}
 - a_n = \frac{\cos n}{n^3}, & - b_n = \sin e^{-n}, & - c_n = n \sin \frac{1}{n}, \\
 - d_n = \frac{2n+3}{2^n}, & - e_n = \frac{\sqrt{n}+1}{n+\ln n}, & - f_n = \arctan n, \\
 - g_n = \frac{1}{n+(-1)^n \sqrt{n}}, & - h_n = \ln \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1} \right), & - i_n = \left(\frac{n+3}{2n+1} \right)^{\ln n}, \\
 - j_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos x)^2}{n^2+(\cos x)^2} dx, & - k_n = \frac{1}{\ln(n) \ln(\operatorname{ch} n)}, & - l_n = \arccos \sqrt[3]{1-n^{-2}}, \\
 - m_n = \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{e}}, & - n_n = n^{-\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n})}. &
 \end{array}$$

Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels positifs tels que la série $(\sum_n u_n)$ converge.

- Montrer que la série $(\sum_n u_n^2)$ converge. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus les u_n positifs ?
- Montrer que les séries $(\sum_n \frac{u_n}{n^2})$, $(\sum_n \frac{\sqrt{u_n}}{n})$ convergent. Pour la deuxième on pourra utiliser Cauchy-Schwartz.
- Montrer que la suite des produits $P_n = \prod_{k=1}^n (1+u_k)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$.
- Soit $(v_n)_n$ une autre suite de réels positifs tels que la série $(\sum_n v_n)$ converge. Montrer que la série $(\sum_n \sqrt{u_n v_n})$ converge.

Exercice 3. Déterminer la nature des séries données par les termes généraux suivants :

$$\begin{array}{lll}
 - a_n = \frac{n^2}{(n-1)!}, & - b_n = \left(\frac{n}{2} \right)^n, & - c_n = \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^n, \\
 - d_n = \left(\frac{n-1}{2n+1} \right)^{(-1)^n n}, & - e_n = \frac{n!}{n^{2n}}, & - f_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{\sqrt{n}}.
 \end{array}$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}.$$

- Quelle est la limite de la suite $\frac{u_{n+1}}{u_n}$?
 Montrer que la suite $(nu_n)_n$ est croissante. En déduire la nature de la série $(\sum_n u_n)$.
- Quelle est la limite de la suite $\frac{v_{n+1}}{v_n}$?
 Montrer qu'on a $(n+1)^\alpha v_{n+1} \leq n^\alpha v_n$ pour tout n et tout $\alpha \in]0, \frac{3}{2}[$. En déduire la nature de la série $(\sum_n v_n)$.

Exercice 5. Étudier la nature des séries données par les termes généraux suivants :

$$a_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}, \quad b_n = \sin \left(\frac{\pi n^2}{n+1} \right), \quad c_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}.$$

Exercice 6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_n = \frac{1}{n^s}$ et $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

- Étudier la convergence des séries $(\sum_{n \geq 1} a_n)$ et $(\sum_{n \geq 1} b_n)$, selon la valeur du paramètre réel s .
- Lorsque $s > 1$, déterminer une relation entre $\zeta = \sum_{n=1}^\infty a_n$ et $\eta = \sum_{n=1}^\infty b_n$.
- Le paramètre s est maintenant un nombre complexe non nul.
 - Montrer qu'on a $b_{2n-1} + b_{2n} = \frac{-1+(1-\frac{1}{2n})^s}{(2n-1)^s}$. En déduire un équivalent simple de $b_{2n-1} + b_{2n}$.
 On admet que le $DL_1(0)$ de $(1+t)^\alpha$ reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}$.
 - On écrit $s = r + i\theta$. Déterminer la forme trigonométrique du complexe n^s .
 Montrer que $(\sum_{n \geq 1} b_{2n-1} + b_{2n})$ converge absolument si $r > 0$.
 - Étudier la convergence de la série $(\sum_{n \geq 1} b_n)$ selon la valeur du paramètre complexe s .

Exercice 7. Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants :

$$u_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right), \quad v_n = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right), \quad w_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}, \quad x_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n n^\beta}.$$

Comparer la convergence de $\left(\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ et $\left(\prod_n \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \right)$.

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad B = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right), \quad C = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-4n}.$$

Exercice 9.

- Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\dots+n}$.
- Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1} \right)$. On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.
- Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\dots+n^2}$.

Exercice 10.

- Calculer, pour tout $x \neq r$, la somme $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{r^k}$. Exprimer $s'(x)$ comme une somme.
- Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}, \quad B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k}, \quad C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{5^k}.$$

Exercice 11. On rappelle que $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Calculer les sommes suivantes :

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}, \quad C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}, \quad D_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(kn)!},$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}, \quad F = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{n!}, \quad G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

Exercice 12. On cherche à démontrer la *formule de De Moivre* $n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Pour cela on va étudier la suite $u_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}$. On pose $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

- Simplifier l'expression de v_n . En utilisant un $DL_3(0)$ de $\ln(1+x)$, déterminer un équivalent simple de v_n .
- Montrer que la série $(\sum v_n)$ converge.
- En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite non nulle. Conclure.

La valeur $C = \sqrt{2\pi}$ dans la formule de De Moivre a été déterminée par Stirling.

Exercice 13. Soit $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 > 1$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + x_n^2$.

- Démontrer que la suite $(x_n)_n$ tend vers $+\infty$.
- On pose $u_n = 2^{-n} \ln x_n$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Démontrer que la série $(\sum_n v_n)$ converge.
- En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

Exercice 14. On définit une suite $(u_n)_n$ par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$. En étudiant la suite $(u_n^2)_n$, montrer que

$$u_n = \sqrt{2n} + \frac{\sqrt{2} \ln n}{8\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 15. Soit $(p_k)_k$ la suite ordonnée des nombres premiers. On souhaite étudier la série $(\sum_k \frac{1}{p_k})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $V_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$.

- Montrer que la suite $(V_n)_n$ converge **ssi** la suite $(\ln V_n)_n$ converge.
En déduire que la suite $(V_n)_n$ converge **ssi** la série $(\sum_k \frac{1}{p_k})$ converge.
- Démontrer que $V_n = \prod_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^{\infty} p_k^{-j} \right)$. En déduire que $V_n \geq \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$. Conclure.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, quelle est la nature de la série $(\sum_k \frac{1}{p_k^\alpha})$?

SÉRIES NUMÉRIQUES (SUITE)

Exercice 16.

- a. On pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = \frac{1}{n}$.
- Montrer que $(\sum(v_{n+1} - v_n))$ converge.
 - Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim v_{n+1} - v_n$.
 - Montrer que $(\sum(u_{n+1} - u_n))$ converge.
 - En déduire l'existence d'une constante γ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Ce nombre γ est appelé constante d'Euler.
- b. On pose $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.
- Vérifier que $A_{2n} = H_n - H_{2n}$.
 - En déduire que $\lim A_{2n} = -\ln(2)$.
 - Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

Exercice 17.

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$ on pose $a_{n,p} = \frac{1}{n^2 - p^2}$ si $n \neq p$ et $a_{n,n} = 0$.

- Montrer que pour tout p fixé, la série $(\sum_n a_{n,p})$ converge.
- Vérifier que $a_{n,p} = \frac{1}{2p}(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p})$.
- Calculer $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_{n,p}$ et $\sum_{n=1}^{p-1} a_{n,p}$.
- En déduire que pour tout p fixé on a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p} = \frac{3}{4p^2}$.
- Montrer que la série $(\sum_p(\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p}))$ converge.
En admettant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, calculer $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,p}$.
- Comparer $a_{n,p}$ et $a_{p,n}$. Quelle est la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_{n,p}$?
- La famille $(a_{n,p})_{n,p}$ est-elle sommable ?

Exercice 18.

On fixe $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$ et on pose $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$.

- Justifier la convergence des séries $(\sum_{p \geq 1} u_{p,q})$ et $(\sum_{q \geq 1} u_{p,q})$ et déterminer leurs sommes.
- Montrer que la série $(\sum_{p \geq 1} \frac{|a|^p}{1 - |a|^{2p}})$ converge.
- Montrer que la famille $(u_{p,q})_{p,q \geq 1}$ est sommable et en déduire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1 - a^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{2n-1}}{1 - a^{2n-1}}.$$