

## ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

**Exercice 1.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

- $x' + 2x = t^2 - 2t + 3$ ,
- $7x' + 2x = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$ ,
- $x' + x = te^{-t}$ ,
- $x' - 2x = \cos t + 2 \sin t$ .
- $x' + x = t - e^t + \cos t$ .

On commencera par résoudre les équations sans second membre.

Puis on cherchera une solution particulière de même forme que le second membre.

**Exercice 2.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

- $x'' - 4x' + 4x = 0$ ,
- $x'' - 6x' + x = 0$ ,
- $x'' - 2x' - 3x = t^2$ ,
- $x'' + x' - 2x = 6(e^t - e^{-t})$ ,
- $x'' + x' - 6x = 5e^{2t} - t - 1$ ,
- $x'' - x' - 2x = \cos t$ ,
- $x'' + 4x = e^t + \cos(2t)$ .

**Exercice 3.** Résoudre les équations différentielles suivantes.

On donnera également la solution vérifiant la condition initiale  $x(0) = 0$ .

- $x + 4x = 0$ ,
- $2x' - 3x = 0$ ,
- $x' + x = \frac{1}{1+e^t}$ ,
- $x' + x = e^t - 1$ ,
- $x' + 2x = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-2t}$ ,
- $x' + 2x = \frac{2t-1}{t^2}$ ,

On commencera par résoudre les équations sans second membre.

Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

**Exercice 4.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

- $t^2x' - x = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,
- $(t \ln t)x' - x = 0$  sur  $]1, +\infty[$ ,
- $x' - \frac{1}{t}x = t^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,
- $x' - \frac{2}{t}x = t^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,
- $(t+1)x' + tx = t^2 - t + 1$  sur  $] -1, +\infty[$ ,
- $x' - 2tx = -(2t-1)e^t$ ,
- $(1+t)x' + x = 1 + \ln(1+t)$  sur  $] -1, +\infty[$ ,
- $x' + (\tan t)x = (\cos t)^{-1}$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ .

On commencera par résoudre les équations sans second membre en calculant une primitive.

Puis on utilisera la méthode de variation de la constante.

**Exercice 5.** Pour  $t > 1$  on pose

$$g(t) = \frac{1+t}{t(1-t)}, \quad h(t) = \frac{1}{\sqrt{t(t-1)}}, \quad k(t) = \frac{\sqrt{t}}{(t-1)^2}.$$

- Déterminer les réels  $a, b$  tels que  $g(t) = \frac{a}{t} + \frac{b}{1-t}$  pour tout  $t > 1$ .  
En déduire une primitive de  $g$  sur  $]1, +\infty[$ .
- À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de  $h$ .  
On pourra utiliser l'identité  $\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$ .
- À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de  $k$ .
- À l'aide des questions précédentes, résoudre sur  $]1, +\infty[$  l'équation différentielle  $2t(1-t)x' + (1+t)x = t$ .  
On commencera par l'équation sans second membre.

**Exercice 6.** On considère l'équation différentielle  $t^2x' - x = 0$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Montrer que les solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont de la forme  $f_A(t) = Af_1(t)$ , avec  $f_1$  une fonction à déterminer.
- Montrer que les solutions sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont de la forme  $g_B(t) = Bg_1(t)$ , avec  $g_1$  une fonction à déterminer.
- On considère la fonction  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $h(t) = g_B(t)$  pour  $t < 0$ ,  $h(0) = C$ ,  $h(t) = f_A(t)$  pour  $t > 0$ .  
À quelles conditions sur  $A, B, C$  la fonction  $h$  est-elle continue en 0?  
Montrer qu'alors  $h$  est dérivable en 0 et déterminer  $h'(0)$ .
- Résoudre l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$  entier.

**Exercice 7.** On considère l'équation différentielle  $tx' - 2x = t^3$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

- Déterminer l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et celui sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
- Montrer que l'on peut toujours recoller une solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  et une solution sur  $\mathbb{R}_-^*$  pour obtenir une solution définie sur  $\mathbb{R}$  entier.
- Quelle est la dimension de l'espace des solutions sur  $\mathbb{R}$ ?

**Exercice 8.** (Partiel 2014)

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  si  $t \neq 0$  et  $f(0) = 1$ .

- La fonction  $f$  est-elle continue en 0? Est-elle dérivable en 0?

On considère l'équation différentielle  $(E) : tx' + x = \cos t$ , d'inconnue  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- Résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Résoudre  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 9.**

- Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + f(t) = f(0) + f(1).$$

- Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables et telles que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + f(t) = \int_0^1 f(t) dt.$$

**Exercice 10.**

- Soit  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que  $|g(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \geq M$ .  
Montrer que pour tout  $x \geq M$  on a

$$\left| e^{-x} \int_M^x e^t g(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

- Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$ . Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .