

SUITES DE FONCTIONS

Exercice 1. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1 + x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}.$$

Exercice 2. Déterminer la limite simple de la suite des fonctions suivantes :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{2x + n^2 x^3}{1 + n^2 x^2}.$$

La limite est-elle uniforme ?

Exercice 3. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{nx}{1 + n^2 x^2}.$$

- Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
- Calculer $f_n(\frac{1}{n})$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément vers g sur \mathbb{R}_+ ?
- Montrer que pour tout n et tout $x > 0$ on a $|f_n(x)| \leq 1/nx$.
- On fixe un réel $a > 0$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a, +\infty[$.

Exercice 4. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

- Déterminer la limite simple g de la suite $(f_n)_n$.
- La convergence est-elle uniforme ?
- Montrer que $f_n(x) - g(x) = g(x)/(nx + 1)$.
- On fixe $A > 0$. Montrer que $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur l'intervalle $[A, +\infty[$.

Exercice 5. On considère les fonctions

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{1 + (x + n)^2}.$$

- Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
- Représenter les graphes de f_0, f_1, f_2 . La convergence de la question précédente est-elle uniforme ?
- Soit A un réel fixé. Montrer que la suite de fonction $(f_n)_n$ converge uniformément vers g sur l'intervalle $[A, +\infty[$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = f(nx)$ et $g_n(x) = f(x/n)$.

- Montrer que les suites de fonctions $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ convergent simplement vers la fonction nulle.
- Les convergences de la question précédente sont-elles uniformes ?
Montrer qu'on a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$.
- On suppose que $I = \int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)dx$.

Exercice 7. On considère la suite de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_0(x) = 0$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x - f_n(x)^2)$.

- Montrer qu'on a $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0, 1]$.
- Déterminer la limite simple r de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
- (i) Soit $\epsilon \in]0, 1[$ fixé. Montrer que pour tout $x \in [0, \epsilon^2]$ et pour tout n on a $|f_n(x) - \sqrt{x}| \leq \epsilon$.
 (ii) Montrer que pour tout $x \in [\epsilon^2, 1]$ on a $\sqrt{x} - f_{n+1}(x) \leq (1 - \epsilon)(\sqrt{x} - f_n(x))$.
 (iii) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(1 - \epsilon)^n \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$.
 (iv) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers r .
- Montrer que la fonction « racine carrée » est limite uniforme sur $[0, 1]$ d'une suite de polynômes. Montrer qu'il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers la fonction « valeur absolue » sur $[-1, 1]$.

Exercice 8. Pour tout $x > 1$ on pose

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \quad \text{et} \quad d_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

- Justifier le fait que $\zeta(x)$ et $f(x)$ sont bien définies pour $x > 1$. Calculer $f(x)$.
 Montrer que la suite de fonction $(d_n)_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction d à déterminer.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 1$ on a

$$0 \leq \frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

En déduire un encadrement de $d(x) - d_n(x)$.

- Montrer que la suite de fonctions $(d_n)_n$ converge uniformément vers d .
- Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ les sommes partielles de la série harmonique.
 On rappelle qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
 Montrer qu'on a $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

Exercice 9. On considère les fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto n^\alpha x(1-x)^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ est un paramètre fixé.

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
- Dresser le tableau de variations de f_n sur $[0, 1]$.
- Pour quelles valeurs de α la suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément vers g ?
- Montrer que $\lim I_n = 0$ lorsque $\alpha < 1$.
- Calculer I_n pour tout n . Pour quelles valeurs de α a-t-on $\lim I_n = 0$?

Exercice 10. On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{n!} x^n e^{-x}$.

- Déterminer la limite simple g de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
- Étudier la fonction f_n sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g .
- A-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} g(x) dx$?
 Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ pour tout n . On pourra procéder par récurrence.