

RÉVISIONS

Dans cette feuille, on appelle « équivalent simple de f en a » un équivalent de la forme $C(x-a)^\alpha(\ln(x-a))^\beta$ avec $C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On appelle « équivalent simple de f en $+\infty$ » un équivalent de la forme $Cx^\alpha(\ln x)^\beta e^{\gamma x}$. Attention, certaines fonctions n'admettent pas d'équivalent simple !

Exercice 1.

- Donner des équivalents simples de $\cos(x)$, $(1+x)^3$ en 0. A-t-on $\cos(x) \sim_0 (1+x)^3$?
- Rappeler « les » équivalents en 0 des fonctions usuelles.
Les fonctions suivantes sont-elles équivalentes en 0 : $\sin x$, x , $x-x^3$, $\tan(x)$, $\cos(x)$?
- Donner des équivalents simples en 0 des fonctions suivantes :
 - $f : x \mapsto \frac{(\sin x)^2}{3x^2}$,
 - $g : x \mapsto \tan(x) \ln(1+x)$,
 - $h : x \mapsto \frac{x^4-2x^2}{2x^6+x^3}$.
- Donner un équivalent simple en 0 des fonctions suivantes :
 - $i : x \mapsto \sin(x) + x^3$,
 - $j : x \mapsto \sin(x) - x$.
- Parmi les fonctions f, g, h, i, j , lesquelles sont des $O(x)$? des $o(x)$?

Exercice 2. Donner des équivalents simples des fonctions suivantes, en 0 et en $+\infty$:

- $f : x \mapsto x^2 + x$,
- $g : x \mapsto x + \sqrt{x}$,
- $h : x \mapsto x + 1 + \ln(x)$,
- $i : x \mapsto \ln(x) + (\ln(x))^2$,
- $j : x \mapsto e^x + \sin(x)$,
- $k : x \mapsto \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

Lesquelles de ces fonctions sont des $O(x)$ en 0 ? des $o(x)$? et en $+\infty$?

Exercice 3.

En calculant des DL, donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :

- $f : x \mapsto 2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$ en 0,
- $g : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-x)$ en 0,
- $h : x \mapsto \ln(x)$ en 0, 1, 2, $+\infty$,
- $i : x \mapsto \sqrt{2+x} - \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$ en 2,
- $j : x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ en $\frac{\pi}{4}$,
- $k : x \mapsto e^x - e^{2-x}$ en 1,
- $l : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$,
- $m : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$ en $+\infty$,
- $n : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ en 0,
- $p : x \mapsto \ln(x+1) - \ln(x)$ en $+\infty$.

Exercice 4.

- Montrer que si $f \sim_b g$ et $\lim_a u = b$, alors $f \circ u \sim_a g \circ u$ (avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).
- Donner des équivalents simples des fonctions suivantes en 0 :
 - $f : x \mapsto \sin((x-1)^2)$ en 1,
 - $g : x \mapsto \tan(2\sqrt{x})$ en 0,
 - $h : x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$ en $+\infty$.
- Donner des équivalents simples des fonctions suivantes :
 - $i : x \mapsto \arctan(x^2)$ en 0,
 - $j : x \mapsto \arccos(x)$ en 1.
- Montrer que $\ln \circ u \sim_a u - 1$ si $\lim_a u = 1$.
En déduire un équivalent simple de $\ln(\cos x)$ en 0.

Exercice 5.

- a. (i) Les fonctions $x \mapsto 2x$, $x \mapsto 2x + 1$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?
 Les fonctions $x \mapsto e^{2x}$, $x \mapsto e^{2x+1}$ sont-elles équivalentes en $+\infty$?
 Les fonctions $x \mapsto 1 + x$, $x \mapsto 1 + x^2$ sont-elles équivalentes en 0 ?
 Les fonctions $x \mapsto \ln(1 + x)$, $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sont-elles équivalentes en 0 ?
- (ii) Soit u, v deux fonctions telles que $u \sim_a v$. A-t-on $f \circ u \sim_a f \circ v$ pour toute fonction f ?
- b. (i) On suppose que $u \sim_a v$. Montrer que $u^\alpha \sim_a v^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (ii) On suppose que $u \sim_a v$ et $\lim_a u = \lim_a v = 0$ ou $+\infty$. Montrer que $\ln \circ u \sim_a \ln \circ v$.
- (iii) Donner des équivalents simples des fonctions suivantes aux points demandés :
 — $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ en $+\infty$,
 — $g : x \mapsto \sqrt{2x^3 + x^2}$ en 0 ,
 — $h : x \mapsto \ln(\sin(x))$ en 0 .

Exercice 6. Déterminer des équivalents simples des suites suivantes :

- $r_n = 2n^2 - n$,
- $s_n = \sqrt{n} + (\ln n)^3 + \sin(n)$,
- $t_n = e^n + n^e$,
- $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$,
- $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
- $w_n = \sin\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$,
- $x_n = \ln(1 + e^n)$,
- $y_n = \ln(1 + e^{-n})$,
- $z_n = \ln\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)$.

Lesquelles de ces suites sont des $o(n^2)$? des $O(n^{-1})$?

Exercice 7. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n \ln(1 + x^2)$.

On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ et on cherche à étudier la suite $(I_n)_n$.

- a. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- b. Trouver un majorant de $\ln(1 + x^2)$ sur $[0, 1]$. En déduire que $I_n = O(n^{-1})$.
 Quelle est la limite de la suite $(I_n)_n$?
- c. On pose $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.
 En utilisant la même méthode que précédemment, déterminer la limite de la suite $(J_n)_n$.
- d. Montrer que $I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$. En déduire un équivalent de la suite $(I_n)_n$.

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_1^2 \frac{dx}{x(1 + \ln x)}, & I_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{ch} x}, & I_3 &= \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt, \\
 I_4 &= \int_0^1 x^2 e^x dx, & I_5 &= \int_1^2 (\ln x)^2 dx, & I_6 &= \int_1^e x (\ln x)^2 dx, \\
 I_7 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(2x) dx, & I_8 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x)^2} dx, & I_9 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos x)^3 (\sin x)^3}{1 + (\sin x)^2} dx, \\
 I_{10} &= \int_0^1 \frac{e^x dx}{10 - 3e^x}, & I_{11} &= \int_0^1 \frac{dx}{4x^2 + 9}.
 \end{aligned}$$

Exercice 9. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \frac{1}{1 + \sqrt{x}}, & f_2(x) &= x^2 \sqrt{1 + x^3}, & f_3(x) &= \frac{1 + \ln x}{x \ln x}, & f_4(x) &= \frac{x^2}{2 + x^3}, \\
 f_5(x) &= (x + 1)e^x, & f_6(x) &= e^x \sin x, & f_7(x) &= \arctan x, & f_8(x) &= x \cos 2x, \\
 f_9(x) &= \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}, & f_{10}(x) &= \frac{x}{x^3 - 3x + 2}, & f_{11}(x) &= \frac{x\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}, \\
 f_{12}(x) &= (x^2 - x + 3) \sin x, & f_{13}(x) &= \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}, & f_{14}(x) &= \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos x}}.
 \end{aligned}$$