

ADM214T — MATHÉMATIQUES  
SECONDE SESSION

*Durée : 2h. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte cinq exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Chaque étudiant·e doit porter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.*

**Exercice 1.** On considère le polynôme  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ .

- Vérifier que  $r = 2$  est racine du polynôme  $P$ .
- Trouver un polynôme  $Q$  tel que  $P(x) = (x - 2)Q(x)$ .
- Déterminer les racines de  $P$ .

**Exercice 2.** On considère la matrice suivante, qui dépend d'un paramètre  $m$  :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ m & -1 \end{pmatrix}.$$

- Calculer la trace et le déterminant de  $A$ , en fonction du paramètre  $m$ .
- Écrire le polynôme caractéristique  $P_A(x)$ , qui dépend également du paramètre  $m$ .
- Pour quelles valeurs de  $m$  la matrice  $A$  admet-elle deux valeurs propres distinctes ?  
Lorsque  $A$  admet deux valeurs propres distinctes, donner leur valeur en fonction du paramètre  $m$ .

**Exercice 3.** On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Calculer la matrice  $A^2$ . *On présentera le détail des calculs.*
- Calculer le déterminant de  $A$ .
- Justifier l'inversibilité de  $A$  et calculer son inverse.
- Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 4x + 3y - 3z = 1 \\ -3x - 2y + 3z = 1 \\ 3x + 3y - 2z = 0. \end{cases}$$

- Calculer le polynôme caractéristique  $P_A(x)$  de  $A$ .
- À l'aide de la question précédente, montrer que  $A^3 = 3A - 2I$ .
- Trouver 3 nombres  $a, b, c$  tels que  $A^5 = aA^2 + bA + cI$ .  
En déduire la valeur de la matrice  $A^5$ .

