

PARTIEL DE RATRAPAGE
13 AVRIL 2018

Durée : 1h30. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte trois exercices indépendants. Chaque étudiant(e) doit porter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.

Exercice 1. On considère le polynôme $Q(x) = x^2 + 3x + m$, où m est un paramètre réel.

- Déterminer les racines de Q lorsque $m = 2$.
- Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $Q(x) = 0$ n'admet-elle aucune solution ?
- En utilisant la question précédente, dire s'il est possible de trouver deux nombres dont le produit vaut 3 et la somme vaut -3 . On justifiera la réponse.

On considère maintenant le polynôme $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

- Vérifier que 3 est racine de P .
- En utilisant la question a., déterminer les racines de P .

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant, d'inconnues x, y et de paramètre m :

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 3y = -2. \end{cases}$$

- Préciser quelles sont la matrice A et les colonnes X, C dans l'écriture matricielle du système : $AX = C$.
- Calculer le déterminant de A .
La matrice A est-elle inversible ?
- Calculer l'inverse de la matrice A .
En déduire la ou les solution(s) du système, en fonction du paramètre m .

On modifie le système précédent pour considérer le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = m \\ 2x + 4y = -2. \end{cases}$$

On note B la matrice de ce nouveau système.

- Dire combien le nouveau système a de solutions, en discutant selon la valeur du paramètre m .

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

- Calculer le produit matriciel $A \times A$. On présentera le détail des calculs.
Sans nouveau calcul, en déduire qu'on a $A^4 = I$.

Soit B une matrice carrée à 2 lignes et 2 colonnes.

On suppose que $\text{Tr}(B) = 0$, mais pas que $B = A$, et on note $d = \det(B)$.

- Écrire le polynôme caractéristique $P_B(x)$ de B .
La réponse fait intervenir la variable x et le paramètre d .
- Montrer que $B^2 = -dI$.
- À l'aide de la question précédente, montrer que B^4 est un multiple de la matrice I .
Comparer avec le résultat de la question a. lorsque $B = A$.