Université de Caen | 2017-2018
UFR de Droit et Sciences Politiques | Mathématiques
L1 AES | 2e semestre

Partiel du 16 mars 2018

Durée : 1h30. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte trois exercices indépendants. Chaque étudiant(e) doit porter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.

Exercice 1. On considère le polynôme $Q(x) = x^2 + 2x - m$, où m est un paramètre réel.

a. Déterminer les racines de Q lorsque $m = 1$.

b. Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation $Q(x) = 0$ admet-elle au moins une solution ?

c. En utilisant la question précédente, dire s'il est possible de trouver deux nombres dont le produit et la somme valent -2. On justifiera la réponse.

On considère maintenant le polynôme $P(x) = x^3 - 5x + 2$.

d. Vérifier que 2 est racine de P.

e. En utilisant la question a., déterminer les racines de P.

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant, d'inconnues x, y et de paramètre m :

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ mx + 4y = -8. \end{cases}$$

a. Préciser quelles sont la matrice A et les colonnes X, C dans l'écriture matricielle du système : $AX = C$.

b. Calculer le déterminant de A en fonction du paramètre m.
Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ?

c. On suppose *dans cette question seulement* que $m = 1$.
Calculer dans ce cas l'inverse de la matrice A.
En déduire la ou les solution(s) du système.

d. Vérifier que $x = 0$, $y = -2$ est solution du système, quelle que soit la valeur du paramètre m.

e. Dire combien le système a de solutions, en discutant selon la valeur du paramètre m.
On recommande d'utiliser la question d.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit matriciel $A \times A$.
On présentera le détail des calculs.

Soit B une matrice carrée à 2 lignes et 2 colonnes.
On suppose que $\mathrm{Tr}(B) = 2$ et $\det(B) = 5$, *mais pas que* $B = A$.

b. Écrire le polynôme caractéristique $P_B(x)$ de B.

c. Montrer que $B^2 = 2B - 5I$.

d. À l'aide de la question précédente, exprimer B^3, puis B^4, comme combinaisons linéaires de B et I.

e. Déterminer les 4 coefficients de la matrice A^4.