

ADM214T — MATHÉMATIQUES
SECONDE SESSION

Durée : 2h. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité. Chaque étudiant doit porter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.

Exercice 1. On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$.

- Vérifier que $r = -1$ est racine du polynôme P .
- Trouver un polynôme Q tel que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
- Déterminer les racines de P .

Exercice 2. On considère la matrice suivante, qui dépend d'un paramètre m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer la trace et le déterminant de A , en fonction du paramètre m .
- Écrire le polynôme caractéristique $P_A(x)$, qui dépend également du paramètre m .
- Calculer les valeurs propres de A lorsque $m = -1$.
- Pour quelles valeurs de m la matrice A n'admet-elle aucune valeur propre ?

Exercice 3. On considère la matrice suivante :

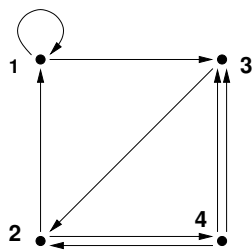
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Calculer la matrice A^2 . *On présentera le détail des calculs.*
- Calculer le déterminant de A .
- Justifier l'inversibilité de A et calculer son inverse.
- Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 1 \\ -2y + 2z = 2 \\ -x - 2y + 2z = 1. \end{cases}$$

- Calculer le polynôme caractéristique $P_A(x)$ de A .
- À l'aide de la question précédente, montrer que $A^3 = 2A^2 + 2A + 2I$.
- À l'aide de la question précédente, trouver 3 nombres a, b, c tels que $A^4 = aA^2 + bA + cI$.
En déduire les coefficients de la matrice A^4 .

Exercice 4. On considère le graphe \mathbb{G} suivant :



a. Écrire la matrice d'adjacence A du graphe \mathbb{G} .

On donne ci-dessous les matrices A^2 , A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

b. La matrice A est-elle irréductible ?

Que peut-on en déduire pour le graphe \mathbb{G} ?

c. Dans le graphe \mathbb{G} , combien y a-t-il de chemins de longueur 3 allant du sommet 4 vers le sommet 1 ?
Expliquer comment trouver cette information matriciellement.