Analyse Fonctionnelle
Contrôle terminal
25 avril 2019

Durée : 3 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère une série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k)$ avec $f_k \in C([0,1]\,,\mathbb{R})$ pour tout k. On suppose que la série converge simplement sur $[0,1]$. On note $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ les sommes partielles et $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ la somme de la série.

1. Rappeler les énoncés des théorèmes de Dini.
2. On suppose que les fonctions f_k sont à *valeurs positives* et que S est continue sur $[0,1]$.
   Montrer que $(S_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. On considère le cas où $f_k(t) = -t^k \ln(t)$, $f(0) = 0$.
   La série $(\sum f_k)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 2.

1. Soit F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et F^* son dual topologique. Montrer que si $x \in F$ est un vecteur *non nul*, il existe une forme linéaire $\varphi \in F^*$ telle que $\varphi(x) \neq 0$.
   On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Soit E, F des $\mathbb{R}$-espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\varphi \in F^*$, la forme linéaire $\varphi \circ T \in E^*$ est également continue.

2. On note $G(T) \subset E \times F$ le graphe de T. Montrer que
$$G(T) = \{(x,y) \in E \times F \mid \forall \varphi \in F^* \quad \varphi \circ T(x) = \varphi(y)\}.$$
3. Montrer que l'application linéaire T est continue.

Exercice 3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1]\,,\mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E. Pour $t \in [0,1]$ on note φ_t l'application linéaire $\varphi_t : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$.
On se donne de plus une autre norme $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
— (E,N) est complet ;
— si f_n converge vers f relativement à N alors f_n converge simplement vers f.

1. On fixe $f \in E$. Montrer que la famille de nombres réels $\varphi_t(f)$, avec $t \in [0,1]$, est bornée.
2. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ l'application φ_t est continue *relativement à* N.
3. Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq KN(f)$ pour toute $f \in E$.
   On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus et les questions précédentes.
4. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
   On pourra appliquer un théorème du cours à l'application $\mathrm{Id} : E \to E$.

(suite au verso)

Exercice 4. On considère l'espace $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme du sup sur E.
On définit un opérateur $S : E \to E$ en posant $S(x) = (x_{k+1})_k$ si $x = (x_k)_k \in E$. Autrement dit

$$S(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

On note $I = \mathrm{Im}(S - \mathrm{Id}) \subset E$. On considère également la suite constante $e = (1, 1, 1, \ldots)$, et $C = \mathrm{Vect}\{e\}$ le sous-espace des suites constantes.

1. Montrer que I et C sont en somme directe.

On peut donc définir une forme linéaire $L_0 : I + C \to \mathbb{R}$ en posant $L_0((S - \mathrm{Id})(x) + \lambda e) = \lambda$ pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. On considère la forme linéaire $c_n \in E^*$ donnée par $c_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$ si $x = (x_k)_k$.
   (a) Montrer que pour $z \in I + C$ on a $\lim_{n\to\infty} c_n(z) = L_0(z)$.
   (b) En déduire que la forme linéaire L_0 est continue.
3. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue $L \in E^*$ telle que $\|L\| = 1$, $L(e) = 1$ et $L \circ S = L$.

Dans la suite on fixe une forme linéaire L vérifiant ces 3 propriétés.

4. (a) Soit $x = (x_k)_k$, $y = (y_k)_k$ deux suites dans E.
   On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_k = y_k$ pour tout $k \geq n$.
   Montrer que $L(x) = L(y)$. Quel résultat obtient-on dans le cas où y est la suite nulle ?
   (b) Montrer que $L(x) = 0$ pour toute suite $x \in E$ qui converge vers 0.
   En déduire que si la suite $x = (x_k)_k \in E$ converge, on a $L(x) = \lim_{k\to\infty} x_k$.
5. On considère $x = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \in E$. Calculer $L(x)$. *On pourra utiliser $S(x)$.*
   A-t-on $L(xy) = L(x)L(y)$ pour toutes les suites x, $y \in E$?
6. Soit $x = (x_k)_k \in E$ telle que $x_k \geq 0$ pour tout x. Montrer qu'on a $L(x) \geq 0$.
   Indication. On pourra observer que le vecteur $y = \|x\|_\infty e - x$ vérifie alors $\|y\|_\infty \leq \|x\|_\infty$.
7. Pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$ on pose $m(A) = L(\chi_A)$, où $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ est la fonction caractéristique de A (considérée comme une suite).
   (a) Montrer qu'on a $m(A) \geq 0$ pour toute partie $A \subset \mathbb{N}$, et $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.
   Combien valent $m(\emptyset)$ et $m(\mathbb{N})$?
   (b) On note $A + k = \{a + k \mid a \in A\}$, pour $A \subset \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $m(A + k) = m(A)$.
   (c) L'application $m : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ est-elle une mesure ?