

PARTIEL DU 15 MARS 2019

Durée : 1h30. Tous les documents et calculatrices (autonomes, non communicantes) sont autorisées. Le sujet comporte trois exercices indépendants. Chaque étudiant(e) doit noter son nom dans le coin supérieur droit de la copie et le cacher par collage.

Exercice 1. On considère le polynôme $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$.

- Vérifier que 2 est racine de Q .
- Factoriser Q comme produit d'un polynôme de degré 1 et d'un polynôme de degré 2.
- Déterminer toutes les racines de Q .
- Est-il possible de trouver deux nombres dont la somme vaut -4 et le produit vaut 5 ?

Exercice 2. On considère le système linéaire suivant, d'inconnues x, y et avec paramètre m :

$$\begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 3x + my = 6 \end{cases}$$

- Écrire le système sous la forme matricielle $AX = C$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
- On se place, *pour cette question uniquement*, dans le cas $m = 10$.
Résoudre le système dans ce cas.
- Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible?
- On se place, *pour cette question uniquement*, dans le cas $m = 9$.
Le système a-t-il dans ce cas : une solution unique ? aucune solution ? une infinité de solutions ?

Exercice 3. On considère la matrice suivante, qui dépend d'un paramètre m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 + 2m & 4m \\ -m & 1 - 2m \end{pmatrix}$$

- On se place, *pour cette question uniquement*, dans le cas $m = 1$.
Écrire la matrice A dans ce cas et calculer A^2 . *On présentera le détail du calcul.*
- Calculer la trace de A et le déterminant de A .
On pourra simplifier l'expression obtenue pour le déterminant en utilisant l'identité remarquable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.
- Écrire le polynôme caractéristique de A .
- Montrer sans nouveau calcul qu'on a $A^2 - 2A + I = 0$, quelle que soit la valeur du paramètre m .
- On pose $B = 2I - A$. À l'aide de la question précédente, montrer que B est l'inverse de A .
- Calculer A^{-1} de deux manières différentes.