Corrigé du Partiel

Exercice 1.
On note $C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^2$, que l'on munit de la norme du sup.
Soit X une partie fermée de $[0,1]^2$. On note $R : C_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \to C(X,\mathbb{R})$, $f \mapsto f_{|X}$ l'application de restriction.
En utilisant le théorème de Stone-Weierstraß, montrer que l'image $A = \mathrm{Im}(R)$ de R est dense dans $C(X,\mathbb{R})$.

L'espace $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, et le sous-ensemble $[0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ est fermé borné (pour n'importe quelle norme) donc compact. Alors $X \subset [0,1]^2$ est fermé dans un compact, donc compact. Pour appliquer le théorème de Stone-Weierstraß il reste à vérifier que A est une sous-algèbre unifère de $C(X,\mathbb{R})$ qui séparer les points.

A est une sous-algèbre unifère car R est un morphisme d'algèbres unifère. Plus précisément, pour f, $g \in A$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on peut écrire $f = R(f_0)$, $g = R(g_0)$ avec f_0, $g_0 \in C_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, et on a alors $f + \lambda g = R(f_0 + \lambda g_0)$, $fg = R(f_0 g_0)$ avec $f_0 + \lambda g_0$, $f_0 g_0 \in C_b(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, donc $f + \lambda g$, $fg \in A$. De plus, si $1_X \in C(X,\mathbb{R})$ désigne la fonction constante égale à 1, on a $1_X = R(1_{\mathbb{R}^2}) \in A$.

Pour vérifier que A sépare les points, on remarque que les fonction p, $q : X \to \mathbb{R}$ données par $p(x,y) = x$, $q(x,y) = y$, appartiennent à A. En effet, les fonctions f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ données par $f(x,y) = \max(0, \min(1,x))$ et $g(x,y) = \max(0,\min(1,y))$ sont continues bornées sur $\mathbb{R}^2$ et on a $p = R(f)$, $q = R(g)$. Alors, si on fixe $(x,y) \neq (x',y')$ dans X, on a soit $x \neq x'$ et donc $p(x,y) \neq p(x',y')$, soit $x = x'$ et alors $y \neq y'$ donc $q(x,y) \neq q(x',y')$.

Remarque. En fait on peut montrer que R est surjective : toute fonction continue sur X s'étend en une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^2$. C'est un cas particulier du théorème d'extension de Tietze-Urysohn.

Exercice 2.
Soit $K \in C([-1,1]^2, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([-1,1],\mathbb{R}) \to C([-1,1],\mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule suivante, pour $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ et $s \in [-1,1]$:

$$T(f)(s) = \int_{-1}^{1} K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

On munit $[-1,1]$ de la distance usuelle et $[-1,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = |s-s'| + |t-t'|$.
On munit $C([-1,1],\mathbb{R})$ et $C([-1,1]^2,\mathbb{R})$ de la norme du sup, *notée $\|\cdot\|_\infty$.*

1. *Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :*
   - *que K est bornée sur $[-1,1]^2$.* Il s'agit du théorème des bornes : une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
   - *que K est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.* Il s'agit du théorème de Heine : une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

   Rappeler la définition de la continuité uniforme de K sur $[-1,1]^2$. Cette définition s'écrit :
   $\forall \epsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall (s,t),(s',t') \in [-1,1]^2\ \ d((s,t),(s',t')) \leq \alpha \Rightarrow |K(s,t) - K(s',t')| \leq \epsilon$.
   Les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges.

2. *On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([-1,1],\mathbb{R})$ pour toute $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application linéaire T est continue.*
   Montrons que T est une application linéaire bornée. Pour $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ on a d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales :

   $$|T(f)(s)| \leq \int_{-1}^{1} |K(s,t)f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} \|K\|_\infty \|f\|_\infty \mathrm{d}t = 2\|K\|_\infty \|f\|_\infty.$$

   La norme $\|K\|_\infty$ est bien définie d'après la question 1. En passant au sup sur s on obtient l'inégalité $\|T(f)\|_\infty \leq 2\|K\|_\infty \|f\|_\infty$, qui montre que T est bornée avec $\|T\| \leq 2\|K\|_\infty$.

3. *On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [-1,1]$ tels que $|s - s'| \leq \alpha$.*
   On applique la continuité uniforme de K sur $[-1,1]^2$, justifiée à la question 1, avec le $\epsilon > 0$. Notons $\alpha > 0$ le réel obtenu. Alors pour tous s, $s' \in [-1,1]$ tels que $|s - s'| \leq \alpha$ et pour tout $t \in [-1,1]$ on a $d((s,t),(s',t)) = |s - s'| \leq \alpha$ donc $|K(s,t) - K(s',t)| \leq \epsilon$. Pour toute $f \in C([-1,1],\mathbb{R})$ on peut alors écrire :

   $$\begin{aligned}|T(f)(s) - T(f)(s')| &= \left|\int_{-1}^{1} (K(s,t) - K(s',t)) f(t) \mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_{-1}^{1} |K(s,t) - K(s',t)| \times |f(t)| \mathrm{d}t \leq \int_{-1}^{1} \epsilon \|f\|_\infty \mathrm{d}t = 2\epsilon \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

4. *On note $B = \{f \in C([-1,1],\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité fermée de $C([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([-1,1],\mathbb{R})$ est compacte.*
   Il suffit d'appliquer le théorème d'Ascoli à $C = T(B)$. Notons tout d'abord que $[-1,1]$ est bien compact. Fixons $s \in [-1,1]$ et montrons l'équicontinuité de C en s. Pour $\epsilon > 0$ fixé, on applique la question précédente à $\frac{\epsilon}{2}$. Le réel $\alpha > 0$ obtenu convient : en effet, pour toute fonction $g \in C$ on peut écrire $g = T(f)$ avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et on a alors, pour tout $s' \in [-1,1]$ tel que $|s - s'| \leq \alpha$, $|g(s) - g(s')| \leq 2\frac{\epsilon}{2}\|f\|_\infty = \epsilon$. Enfin, d'après la question 2 on a $\|g\|_\infty \leq 2\|K\|_\infty$ pour toute $g \in C$, donc pour tout $s \in [-1,1]$ l'ensemble $C_s := \{g(s) \mid g \in C\}$ est borné, donc d'adhérence compacte dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. *Soit H un espace de Hilbert séparable. Pour $x \in H$, $r > 0$ on note $B_H(x,r) = \{y \in H \mid \|x - y\| < r\}$ la boule ouverte de centre x et rayon r dans H.*

Un opérateur *sur H est une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est* compact *si l'adhérence de $T(B_H(0,1))$ dans H est compacte. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est* de rang fini *si son image $\mathrm{Im}(T)$ est un sous-espace de dimension finie de H.*

1. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur* de rang fini, *et $F = \mathrm{Im}(T)$ son image.*

(a) *Montrer que $T(B_H(0,1))$ est une partie bornée de F.*
Comme T est un opérateur on peut écrire, pour tout $x \in B_H(0,1)$: $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\| \leq \|T\|$.

(b) *Montrer que l'opérateur T est compact.*
D'après la question précédente, l'adhérence de $T(B_H(0,1))$ est une partie bornée de F. Comme elle est de plus fermée, et que F est de dimension finie, elle est compacte.

On fixe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de H et on rappelle que tout vecteur $x \in H$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ avec $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suite complexe telle que $\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |\lambda_k|^2$. On note $P_n : H \to H$ la projection orthogonale sur Vect $\{e_k, 1 \leq k \leq n\}$. *Ainsi $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ si $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$.*

2. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. On note $C = \overline{T(B_H(0,1))}$.*
On considère les fonctions $f_n : C \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|y - P_n(y)\|$.

(a) *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers 0.*
On pourra écrire $y \in C$ sous la forme $y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$.
On fixe $y \in C$ et on l'écrit $y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$. On a alors $y - P_n(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k e_k$ donc $\|y - P_n(y)\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2$. Comme la série $(\sum_{k\geq 1} |\lambda_k|^2)$ converge la suite de ses restes tend vers 0, ce qui montre que $\|y - P_n(y)\|^2$ tend vers 0. En prenant la racine carrée (qui est continue en 0) on obtient la convergence simple de $(f_n)_n$ vers 0.

(b) *Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0.*
On pourra appliquer le théorème de Dini.
Par hypothèse C est un compact. Les fonction f_n sont continues (car la norme et les projections orthogonales le sont), ainsi que leur limite simple (la fonction nulle). Pour appliquer le théorème de Dini il reste à justifier la monotonie de la suite. En reprenant le calcul de la question précédente, on observe que $f_n(y)^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^2 \geq \sum_{k=n+2}^{\infty} |\lambda_k|^2 = f_{n+1}(y)^2$ car on a une somme de termes positifs. Comme les f_n sont positives on peut prendre la racine carrée, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et on voit que $(f_n(y))_n$ est décroissante, pour tout $y \in C$.

(c) *Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|T(x) - P_n(T(x))\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in B_H(0,1)$.*
On applique la convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers 0 avec le ϵ fixé. On obtient un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|f_n(y)| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $y \in C$. Pour tout $x \in B_H(0,1)$ on peut appliquer ceci à $y = T(x)$ et en écrivant la définition de f_n on obtient, pour tout $n \geq N$, $\|T(x) - P_n(T(x))\| \leq \epsilon$.

(d) *Montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini (relativement à la norme d'opérateur).*
Les opérateurs $T_n = P_n \circ T$ sont de rang fini car $\mathrm{Im}(T_n) \subset \mathrm{Im}(P_n) = \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Fixons $\epsilon > 0$, notons encore N le rang obtenu à la question précédente, et fixons $n \geq N$. Pour tout $x \in H$, $x \neq 0$, on a $x' = x/\|x\| \in B_H(0,1)$ donc $\|T(x') - P_n(T(x'))\| \leq \epsilon$, ce qui donne par linéarité $\|(T - T_n)(x)\| \leq \epsilon\|x\|$. Cette inégalité est encore valable pour $x = 0$ et on a donc $\|T - T_n\| \leq \epsilon$. On a ainsi montré que $(T_n)_n$ converge vers T relativement à la norme d'opérateur.

3. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et $r > 0$ un réel strictement positif. On suppose qu'il existe un opérateur compact S tel que $\|T - S\| < r$.*

(a) *Montrer que $\overline{S(B_H(0,1))}$ est inclus dans la réunion des boules $B_H(S(x), r)$, avec $x \in B_H(0,1)$.*
Soit $y \in \overline{S(B_H(0,1))}$. Comme y est adhérent à $S(B_H(0,1))$ et $r > 0$ il existe $z \in S(B_H(0,1))$ tel que $\|y - z\| < r$. Par définition on peut écrire $z = S(x)$ avec $x \in B_H(0,1)$. On a alors $y \in B_H(S(x), r)$.

(b) *Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_p \in B_H(0,1)$ tel que $\overline{S(B_H(0,1))}$ est inclus dans $B_H(S(x_1), r) \cup \cdots \cup B_H(S(x_p), r)$.*
Les intersections $B_H(S(x), r) \cap \overline{S(B_H(0,1))}$, indexées par $x \in B_H(0,1)$, forment un recouvrement ouvert de $\overline{S(B_H(0,1))}$, par définition de la topologie induite et grâce à la question précédente. Comme S est un opérateur compact, $\overline{S(B_H(0,1))}$ est un espace compact et on peut donc extraire un sous-recouvrement fini. Ce sous-recouvrement est donné par un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_p \in B_H(0,1)$ qui vérifient la propriété voulue.

(c) *Soit $y \in \overline{T(B_H(0,1))}$. Montrer qu'il existe $x \in B_H(0,1)$ tel que $\|y - S(x)\| \leq 2r$, puis qu'il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\|y - S(x_i)\| < 3r$.*
Comme à la question (a), comme y est adhérent à $\overline{T(B_H(0,1))}$ il existe $x \in B_H(0,1)$ tel que $\|y - T(x)\| < r$. On a par hypothèse $\|T(x) - S(x)\| \leq \|T - S\|\|x\| \leq r\|x\| \leq r$. L'inégalité triangulaire donne alors $\|y - S(x)\| < 2r$. D'après la question précédente il existe $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $S(x) \in B_H(S(x_i), r)$, c'est-à-dire $\|S(x) - S(x_i)\| < r$. En appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire on obtient $\|y - S(x_i)\| < 3r$.

Ainsi $\overline{T(B_H(0,1))}$ est inclus dans la réunion des boules $B_H(S(x_i), 3r)$.

On rappelle qu'un espace métrique C est dit précompact *si pour tout $\epsilon > 0$ on peut le recouvrir par un nombre fini de parties $D_1, \ldots, D_p$ de* diamètre *inférieur à ϵ (c'est-à-dire telles que $d(x, x') \leq \epsilon$ pour x, $x' \in D_i$).*

4. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose que T est limite (pour la norme d'opérateur) d'une suite d'opérateurs compacts $(S_n)_n$. Montrer que $\overline{T(B_H(0,1))}$ est précompact, puis que T est un opérateur compact.*
Soit $\epsilon > 0$. Comme $\lim_{n\infty} S_n = T$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|S_n - T\| \leq \epsilon/6$. Par hypothèse $S = S_n$ est compact et on peut donc appliquer la question 3 avec $r = \epsilon/6$. On obtient un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_p$ et on pose $D_i = B_H(S(x_i), 3r) \cap \overline{T(B_H(0,1))}$. Les parties $D_1, \ldots, D_p \subset \overline{T(B_H(0,1))}$ recouvrent $\overline{T(B_H(0,1))}$ par construction, et elles sont de diamètre inférieur à $6r = \epsilon$ car incluses dans des boules de rayon $3r$. Cela montre que $\overline{T(B_H(0,1))}$ est précompact. De plus $\overline{T(B_H(0,1))}$ est complet car fermé dans un espace de Hilbert, qui est complet. Or un espace précompact et complet est compact. Ainsi $\overline{T(B_H(0,1))}$ est compact, donc T est un opérateur compact.

Remarque. Ainsi l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la norme d'opérateur, et coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des opérateurs de rang fini. On notera que seul le résultat de la question 2 utilise la structure hilbertienne : les résultats des autres questions sont valables dans n'importe quel espace de Banach.