Analyse Fonctionnelle
Partiel du 8 mars 2018

Durée : 2 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Les 3 exercices sont indépendants.
La notation tiendra compte de la qualité et de la précision de la rédaction.

Un petit exo avec Weierstrass ?

Exercice 1. *(Partiel 2017)*
Soit $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t,$$

pour $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et $s \in [0,1]$. On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([0,1], \mathbb{R})$.
On munit $[0,1]$ de la distance usuelle et $[0,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = \max(|s-s'|, |t-t'|)$.
On munit $C([0,1], \mathbb{R})$ et $C([0,1]^2, \mathbb{R})$ de la norme du sup, notée $\|\cdot\|_\infty$.

1. Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :
   — que K est bornée sur $[0,1]^2$,
   — que K est uniformément continue sur $[0,1]^2$.
2. Montrer que l'application linéaire T est continue.
3. On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \leq \epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [0,1]$ tels que $|s - s'| \leq \alpha$.
4. On note $B = \{f \in C([0,1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité fermée de $C([0,1], \mathbb{R})$.
   Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([0,1], \mathbb{R})$ est compacte.
   On pourra appliquer le théorème d'Ascoli.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert de dimension dénombrable.

On fixe une base orthonormée $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de H et on rappelle que tout vecteur $x \in H$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$ avec $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ suite complexe telle que $\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} |\lambda_k|^2$. On note $P_n : H \to H$ la projection orthogonale sur Vect $\{x_k, 1 \leq l \leq n\}$. Ainsi $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ si $x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$. On note $B_H(a, r)$ la boule fermée de H de centre a et rayon r.

Un *opérateur* sur H est une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(H)$. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est *compact* si l'adhérence de $T(B_H(0,1))$ dans H est compacte. On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est *de rang fini* si son image $\operatorname{Im} T$ est un sous-espace de dimension finie de H.

1. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur *de rang fini* et $F = \operatorname{Im}(T)$ son image.
   (a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $T(B_H(0,1)) \subset B_F(0, M)$.
   (b) Montrer que l'opérateur T est compact.
2. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. On note $C = \overline{T(B_H(0,1))}$.
   On considère les fonctions $f_n : C \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \|y - P_n(y)\|$.
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ est décroissante.
   On pourra écrire $y \in C$ sous la forme $y = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k$.
   (b) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0.
   (c) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|T(x) - P_n(T(x))\| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq N$ et tout $x \in B_H(0,1)$.
   (d) Montrer que T est limite d'opérateurs de rang fini (relativement à la norme d'opérateur).
3. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ et $r > 0$ un réel strictement positif.
   On suppose qu'il existe un opérateur compact S tel que $\|T - S\| < r$.
   (a) Soit $z \in \overline{S(B_H(0,1))}$. Montrer qu'il existe $x \in B_H(0,1)$ tel que $\|z - T(x)\| < 2r$.
   (b) Pour tout $x \in B_H(0,1)$ on pose $U_x = B_H(T(x), 2r) \cap \overline{S(B_H(0,1))}$.
   Par définition de la topologie induite, U_x est un ouvert de $\overline{S(B_H(0,1))}$.
   Montrer que les U_x recouvrent $\overline{S(B_H(0,1))}$.
   (c) Montrer qu'il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_p \in B_H(0,1)$ tels que
   $S(B_H(0,1)) \subset B_H(T(x_1), 2r) \cup \cdots \cup B_H(T(x_p), 2r)$.
   (d) Soit $y \in \overline{T(B_H(0,1))}$. Montrer qu'il existe $x \in B_H(0,1)$ tel que $\|y - S(x)\| < 2r$, puis $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\|y - T(x_i)\| < 4r$. Ainsi on a $\overline{T(B_H(0,1))} \subset B_H(T(x_1), 4r) \cup \cdots \cup B_H(T(x_p), 4r)$.
4. Soit $T \in \mathcal{L}(H)$.
   On suppose que T est limite (pour la norme d'opérateur) d'une suite d'opérateurs compacts $(S_n)_n$.
   Montrer que $\overline{T(B_H(0,1))}$ est précompact, puis que T est un opérateur compact.

Ainsi l'ensemble des opérateurs compacts est fermé pour la norme d'opérateur, et coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des opérateurs de rang fini. On notera que seul le résultat de la question 2 utilise la structure hilbertienne : les résultats des autres questions sont valables dans n'importe quel espace de Banach.