L2 Mathématiques – 1er semestre
Seconde Session – Analyse
20 juin 2019 – 1h30

Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction et au soin de la copie.
Toutes les réponses doivent être justifiées.
Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

1. L'intégrale de $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ converge-t-elle en 0^+ ?
2. L'intégrale de $\dfrac{\sqrt{1+t}}{1+t^2}$ converge-t-elle en $+\infty$?
3. L'intégrale de $e^{-t}\sin(t)$ converge-t-elle en $+\infty$?

On justifiera précisément les réponses en utilisant les théorèmes du cours lorsque c'est nécessaire.

Exercice 2 On considère la courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^2$ définie par les fonctions

$$\begin{cases} x(t) = (t-1)^3 \\ y(t) = 2t^3 + 3t^2 - 12t. \end{cases}$$

1. Cette courbe admet-elle des points singuliers ?
2. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe au point de paramètre $t = 2$, puis au point de paramètre $t = 1$.
3. En quels points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ cette courbe admet-elle une tangente horizontale ? verticale ?

Exercice 3 On considère les ensembles suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ et } y \geq x\}, \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(x + y^2) < x^2 - 2y\}.$$

1. Représenter A dans un repère orthonormé.
   On précisera clairement quels points de la frontière de A sont inclus dans A.
2. Montrer que A n'est pas fermé. Montrer que A est borné.
3. Montrer que B est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
   On vérifiera soigneusement les hypothèses du théorème utilisé.

Exercice 4 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - y}{x^2 + |y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Calculer les dérivées partielles de f en tout point (x, y) tel que $y > 0$.
   On commencera par écrire l'expression de $f(x,y)$ sans valeur absolue lorsque $y > 0$.
2. Déterminer les points critiques de f sur le demi-plan ouvert $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0, 0)$ et la calculer.