

FICHE DE TD N° 2

Objectifs : savoir résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues et inverser une matrice carrée d'ordre deux ; savoir discuter un système de deux équations linéaires à deux inconnues avec un paramètre ; savoir calculer directement la puissance n^e d'une matrice carrée d'ordre deux qui a deux valeurs propres distinctes. Tous les nombres considérés sont réels.

Exercice 1. On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer $A(B + C)$ et $AB + AC$.

Exercice 2. On considère les matrices carrées $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer et comparer AB et BA .

Exercice 3. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer AB . Calculer et comparer AC et AD .

Exercice 4.

a. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 13 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 ; en déduire l'inverse de A .

b. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -13 \\ \frac{1}{13} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer B^2 ; en déduire l'inverse de B .

c. Essayer de généraliser les résultats des questions précédentes.

Exercice 5. Écrire chacun des systèmes d'équations linéaires suivants sous la forme matricielle $AX = C$, où A est une matrice carrée, C est une matrice colonne et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la colonne des inconnues :

$$\begin{cases} 3x - 10y = 3 \\ 2x + 15y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - y = 6a \\ 3x + y = 2a \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + my = 5 \\ x - y = m \end{cases} \quad \begin{cases} x + 6y = \lambda x \\ x + 2y = \lambda y \end{cases}$$

Exercice 6. En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, écrire dans chacun des cas suivants l'égalité matricielle $AX = C$ sous la forme d'un système d'équations linéaires d'inconnues x et y :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ m^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2 et en déduire que A est la matrice inverse de A .

b. Utiliser le résultat précédent pour résoudre le système $\begin{cases} 5x - 4y = 6 \\ 6x - 5y = 7 \end{cases}$.

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 11$.

a. Calculer $P(A)$, c'est-à-dire $A^2 + 2A - 11I$.

b. On pose $B = \frac{1}{11}(A + 2I)$. En utilisant a), montrer que B est la matrice inverse de A .

c. Expliciter les coefficients de B .

d. Utiliser ce qui précède pour résoudre le système $\begin{cases} x + 2y = p \\ 4x - 3y = q \end{cases}$ où p et q sont donnés.

Exercice 9. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Calculer le déterminant de P et la matrice complémentaire de P .
- En déduire la matrice inverse de P .

Exercice 10. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants (proposer plusieurs méthodes) :

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 10x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 10y = 3 \\ 2x + 15y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

Exercice 11. Dire si les systèmes linéaires suivants ont : aucune solution, une solution, ou une infinité de solution. Lorsqu'il y a une infinité de solutions, en donner au moins deux.

$$\begin{cases} x + 4y = 1 \\ 2x + 5y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ -6x + 9y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ -6x + 9y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -33x + y = 0 \\ 100x - 3y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -7x + y = 0 \\ 133x - 19y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + \sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x + y = 0 \end{cases}$$

Exercice 12.

On considère la fonction f de deux variables donnée par $f(x, y) = 5x^2 + 5xy + y^2 - 15x - 3y + 7$.

- Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ (cf cours du premier semestre).
- Chercher les points critiques de f , c'est-à-dire les couples (x, y) tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

Exercice 13. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & m \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- Calculer le déterminant de A .
- À quelle condition sur m la matrice inverse de A existe-t-elle ?
- Écrire, dans le cas où elle existe, la matrice inverse A^{-1} .
- Utiliser A^{-1} pour résoudre le système d'équations linéaires $\begin{cases} 3x + my = 4 \\ x - 2y = m. \end{cases}$

Exercice 14. (*Partiel 2018*) On considère le système linéaire suivant, d'inconnues x, y et de paramètre m :

$$\begin{cases} x + 2y = -4 \\ mx + 4y = -8. \end{cases}$$

- Préciser quelles sont la matrice A et les colonnes X, C dans l'écriture matricielle du système : $AX = C$.
- Calculer le déterminant de A en fonction du paramètre m .
Pour quelles valeurs de m la matrice A est-elle inversible ?
- On suppose *dans cette question seulement* que $m = 1$.
Calculer dans ce cas l'inverse de la matrice A .
En déduire la ou les solution(s) du système.
- Vérifier que $x = 0, y = -2$ est solution du système, quelle que soit la valeur du paramètre m .
- Dire combien le système a de solutions, en discutant selon la valeur du paramètre m .
On recommande d'utiliser la question d.

Exercice 15.

Résoudre dans \mathbb{R}^2 les systèmes linéaires suivants (on discutera en fonction du paramètre m) :

$$\begin{cases} 11x - y = m \\ -100x + 9y = 2m \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + my = 5 \\ x - y = m \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y + 3 = 0 \\ 3x + my - 2m + 3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 16. Soit $A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$.

- Calculer la trace et le déterminant de A . Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.
- En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, prouver que $A^2 = A + 2I$. Vérifier en calculant A^2 .
- Exprimer aussi A^3 , A^4 et A^5 comme des combinaisons linéaires de A et I (c'est-à-dire sous la forme $\alpha A + \beta I$, avec des nombres α et β à calculer dans chaque cas).

Exercice 17. Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A + I$.

- Calculer la trace et le déterminant de A . Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.
- Trouver A^2 en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton.
- Montrer que $B^2 = 3A + I$ et écrire les coefficients de B^2 .

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $B = A^2$, puis $C = B^2$ et $D = C^2$.

- En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, écrire B comme combinaison linéaire de A et I .
- Obtenir aussi C et D comme combinaison linéaire de A et I .
- Écrire les coefficients de A^8 .

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

- Calculer la trace et le déterminant de A . Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.
- Trouver les *valeurs propres* de A , c'est-à-dire les racines (éventuelles) de $P_A(x)$.

Exercice 20. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 89 \\ 3 & 95 \end{pmatrix}$.

- Calculer la trace et le déterminant de A . Écrire son polynôme caractéristique $P_A(x)$.
- Trouver les valeurs propres de A .
- En déduire deux nombres dont la somme est 104 et le produit est 588.

Exercice 21. Soit M une matrice à deux lignes et deux colonnes, de trace 13 et de déterminant 12.

- Exprimer M^2 comme combinaison linéaire de M et de I .
- Trouver les valeurs propres de M .
- Trouver un exemple d'une telle matrice.

Exercice 22. (*Partiel 2018*) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

- Calculer le produit matriciel $A \times A$.
On présentera le détail des calculs.

Soit B une matrice carrée à 2 lignes et 2 colonnes.

On suppose que $\text{Tr}(B) = 2$ et $\det(B) = 5$, mais pas que $B = A$.

- Écrire le polynôme caractéristique $P_B(x)$ de B .
- Montrer que $B^2 = 2B - 5I$.
- À l'aide de la question précédente, exprimer B^3 , puis B^4 , comme combinaisons linéaires de B et I .
- Déterminer les 4 coefficients de la matrice A^4 .