Analyse Fonctionnelle
Contrôle terminal
28 mars 2022

Durée : 3 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.
Les 4 exercices sont indépendants.

Exercice 1. On considère une série de fonctions $(\sum_{k\in\mathbb{N}^*} f_k)$ avec $f_k \in C([0,1],\mathbb{R})$ pour tout k. On suppose que la série converge simplement sur $[0,1]$. On note $S_n : x \mapsto \sum_{k=1}^n f_k(x)$ les sommes partielles et $S : x \mapsto \sum_{k=1}^\infty f_k(x)$ la somme de la série.

1. Rappeler l'énoncé d'un théorème de Dini (au choix).
2. On suppose que les fonctions f_k sont à *valeurs positives* et que S est continue sur $[0,1]$. Montrer que $(S_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.
3. On considère le cas où $f_k(t) = \frac{1}{k}(t^k - t^{k+1})$. Calculer S et montrer que la série de fonctions $(\sum f_k)$ converge uniformément sur $[0,1]$.
4. On considère le cas où $f_k(t) = -t^k \ln(t)$, $f_k(0) = 0$. La série $(\sum f_k)$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

Exercice 2. Soit E, F des espaces de Banach non nuls. On note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires *continues* de E dans F et on fixe $S \in \mathcal{L}(E,F)$. On pose $E_0 = \operatorname{Ker}(S) \subset E$.

1. On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $S \circ T = \mathrm{Id}$.
   (a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel qu'on ait $\|T(y)\| \geq \epsilon\|y\|$ pour tout $y \in F$.
   (b) En déduire que $\operatorname{Im}(T)$ est fermée.
   (c) *Question d'algèbre.* Montrer que S est surjective et que $\operatorname{Im}(T)$ est un supplémentaire de E_0.
2. On ne suppose plus l'existence d'un inverse à droite T. On suppose que S est surjective et que $E_0 = \operatorname{Ker}(S)$ admet un supplémentaire fermé $E_1 \subset E$. On note $S_1 : E_1 \to F$ la restriction de S à E_1.
   (a) Montrer que S_1 est une bijection et que la bijection réciproque est continue.
   (b) Montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $S \circ T = \mathrm{Id}$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note E^* l'espace des formes linéaires *continues* sur E, muni de la norme d'opérateur. Soit φ, $\psi \in E^*$.

On rappelle le résultat d'algèbre suivant : si φ est nulle sur $\operatorname{Ker}\psi$, alors φ est proportionnelle à ψ. Autrement dit, si $\varphi(x) = 0$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}\psi$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \alpha\psi$.

On fait maintenant l'hypothèse moins forte suivante : on suppose qu'il existe $\varepsilon \geq 0$ tel que $|\varphi(x)| \leq \varepsilon\|x\|$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}\psi$.

1. Montrer qu'il existe $\varphi' \in E^*$ telle que $\|\varphi'\| \leq \varepsilon$ et $\varphi'(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \operatorname{Ker}\psi$. *On pourra appliquer un théorème de prolongement.*
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \varphi' + \alpha\psi$. *On a alors* $\|\varphi - \alpha\psi\| \leq \varepsilon$.
3. On suppose de plus que $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$. Montrer que $|1 - |\alpha|| \leq \varepsilon$. Dans le cas $\alpha \geq 0$, en déduire que $\|\varphi - \psi\| \leq 2\varepsilon$. Dans le cas $\alpha \leq 0$, en déduire que que $\|\varphi + \psi\| \leq 2\varepsilon$.

(suite au verso)

Exercice 4. Dans cet exercice on fixe une fonction « poids » $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue et strictement positive sur $]0,1[$. On note H l'espace des fonctions mesurables $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telles que $\int_0^1 |f(t)|^2 \rho(t) \mathrm{d}t < +\infty$. On admet que H est un EVN complet pour la norme

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \rho(t) \mathrm{d}t \right)^{1/2}.$$

Pour $\varphi \in C([0,1]\,,\mathbb{C})$ on considère l'application linéaire $M_\varphi : H \to H, f \mapsto \varphi f$.

1. Montrer que M_φ est bien définie et continue pour toute $\varphi \in C([0,1]\,,\mathbb{C})$.
2. Montrer que H est un espace de Hilbert.
   On donnera la formule pour le produit scalaire et on montrera qu'il est bien défini.
3. Montrer que l'adjoint M_φ^* est de la forme M_ψ pour une fonction $\psi \in C([0,1]\,,\mathbb{C})$ à préciser.
4. À quelle condition sur $\varphi \in C([0,1]\,,\mathbb{C})$ l'application M_φ est-elle positive ? Justifier.