Analyse Fonctionnelle
Partiel du 21 février 2022

Durée : 2 heures. Aucun document ni calculatrice n'est autorisé. Les 3 exercices sont indépendants.
La notation tiendra compte de la qualité et de la **précision** de la rédaction.

Exercice 1.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction qu'on calculera.
2. On pose $g_n(x) = \ln(f_{n+1}(x)) - \ln(f_n(x))$ pour $x \in \left]-n, +\infty\right[$.
   Étudier les variations, puis le signe de g_n.
3. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

Exercice 2.
Soit E un espace vectoriel normé et $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire continue.
Pour tout nombre complexe λ on note $E_\lambda(T) = \{x \in E \mid T(x) = \lambda x\}$.
On note $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de E et $\lambda B = \{\lambda x \mid x \in B\} = \{x \in E \mid \|x\| \leq |\lambda|\}$.

On suppose que l'adhérence de $T(B)$ dans E est compacte et on fixe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

1. Montrer que $\lambda B \cap E_\lambda(T) \subset T(B)$.
2. En utilisant les propriétés élémentaires des compacts, montrer que $B \cap E_\lambda(T)$ est compact.
3. Montrer que le sous-espace propre $E_\lambda(T)$ est de dimension finie.
4. Ce résultat est-il encore vrai pour $\lambda = 0$?

Exercice 3.
On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur $|||\cdot|||$.
Pour toute fonction $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule suivante :

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t) f(t) \mathrm{d}t. \qquad (*)$$

On note Pol $\subset C([0,1]^2, \mathbb{R})$ le sous-espace des fonctions polynomiales.

1. (a) Montrer que pour $f \in H$ et $s \in [0,1]$ on a $|T(f)(s)| \leq \|K\|_\infty \|f\|_2$.
   (b) Montrer que l'application linéaire T est bien à valeurs dans H, continue, et que $|||T||| \leq \|K\|_\infty$.
2. On considère le cas où le noyau K est polynomial : $K(s,t) = \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N a_{k,l} s^k t^l$.
   (a) Montrer que $T(f)$ est alors un polynôme, dont on calculera les coefficients en fonction des coefficients $a_{k,l}$ et des *moments* de f donnés par la formule $m_l(f) = \int_0^1 t^l f(t) \mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que dans ce cas T est une application linéaire de rang fini, i.e. $\dim \operatorname{Im} T < +\infty$.
3. Montrer que toute fonction continue $K \in C([0,1]^2, \mathbb{R})$ est limite uniforme de polynômes $P \in$ Pol.
   On appliquera le théorème de Stone-Weierstraß après avoir soigneusement vérifié ses hypothèses.
4. Montrer que tout opérateur à noyau T associé à un noyau K continu sur $[0,1]^2$ est limite dans $\mathcal{L}(H)$ d'applications linéaires de rang fini.

Les questions ci-dessous sont indépendantes des questions 1 à 4.

5. Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ une application linéaire continue telle que $|||\mathrm{Id} - S||| \leq \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer qu'on a $\|S(f)\|_2 \geq \frac{1}{2}\|f\|_2$ pour toute $f \in H$. En déduire que S est injective.
   (b) L'application identité Id est-elle limite d'applications linéaires de rang fini dans $\mathcal{L}(H)$?