Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths

2e semestre 2021-2022
Mathématiques
Analyse fonctionnelle

Compacité

Exercice 1.

a. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|(m_{ij})_{ij}\| = \max_{ij} |m_{ij}|$. On note $O_n \subset M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales. Montrer que O_n est compact.

b. Soit E un EVN. On note B la boule unité fermée de E et S la sphère unité de E. Montrer que B est compacte si et seulement si S est compacte. Pour quels espaces E la sphère S est-elle compacte ?

c. (i) On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $F = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid Mv = \lambda v\}$ est fermé.
(ii) On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $G = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists v \neq 0 \; Mv = \lambda v\}$ est fermé.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{R}$-EVN et $K \subset E$ une partie compacte, convexe, non vide. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire (ou affine) continue telle que $T(K) \subset K$. On veut montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $T(x) = x$. Pour cela on note $T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^k$.

a. Montrer que $T_n(K)$ est un fermé contenu dans K pour tout n.

b. Montrer que $T_n T_m = T_m T_n$.
En déduire que $T_{n_1}(K) \cap \cdots \cap T_{n_p}(K)$ est non vide pour toute famille finie d'indices $n_1, \ldots, n_p$.

c. Montrer que $L = \bigcap_n T_n(K)$ est non vide. On fixe $x \in L$.

d. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on choisit $y \in K$ tel que $x = T_n(y)$. Calculer $T(x) - x$ en fonction de y. Conclure.

Exercice 3. On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par récurrence en posant, pour tout $t \in [0,1]$: $f_0(t) = 0$ et $f_{n+1}(t) = f_n(t) + \frac{1}{2}(t - f_n(t)^2)$.

a. On fixe $t \in [0,1]$. Étudier la suite récurrente $(f_n(t))_n$.
On montrera notamment qu'elle est croissante et converge vers un réel $g(t)$ que l'on calculera.

b. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers g.

Exercice 4. *(partiel 2021)* On définit une suite de fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $f_0(x) = 1$ et

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\Big(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\Big).$$

a. À l'aide d'une étude de fonction, montrer qu'on a $\frac{1}{2}(t + \frac{x}{t}) \geq \sqrt{x}$ pour tous $t \in]0,1]$, $x \in [0,1]$.

b. En déduire que, pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_n$ est décroissante.

c. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge *uniformément* vers une fonction que l'on déterminera.

Exercice 5.

a. Soit X, Y des espaces métriques compacts et $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et des fonctions continues $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, $g_1, \ldots, g_n : Y \to \mathbb{R}$ telles qu'on ait $|h(x,y) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y)| \leq \epsilon$ pour tout $(x,y) \in X \times Y$.

b. Montrer que toute fonction continue $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Exercice 6.
On note $C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^2$, que l'on munit de la norme du sup.
Soit X une partie fermée de $[0,1]^2$. On note $R : C_b(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to C(X, \mathbb{R})$, $f \mapsto f_{|X}$ l'application de restriction.
En utilisant le théorème de Stone-Weierstraß, montrer que l'image $A = \mathrm{Im}(R)$ de R est dense dans $C(X, \mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité fermé dans $\mathbb{C}$. On note $A \subset C(D, \mathbb{C})$ le sous-espace des fonctions polynômiales $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ (avec $a_k \in \mathbb{C}$) et on munit $C(D, \mathbb{C})$ de la norme du sup.

a. Montrer que A est une sous-algèbre unifère de $C(D, \mathbb{C})$ qui sépare les points.

b. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \mathrm{d}t$ est continue sur $C(D, \mathbb{C})$.

c. Montrer que pour tout $f \in A$ on a $\varphi(f) = f(0)$.

d. Montrer que A n'est pas dense dans $C(D, \mathbb{C})$.

e. Quelle hypothèse faut-il rajouter au théorème de Stone-Weierstraß dans le cas de fonctions à valeurs complexes ?

Exercice 8. On considère l'espace $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme $\|\cdot\|_\infty$, et l'espace $F = C^1([0,1], \mathbb{R})$ de muni de la norme $N : f \mapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. On fixe un sous-espace $V \subset E \cap F$ fermé dans E.

a. Montrer que V est fermé dans F. Montrer que $\mathrm{Id} : (V, N) \to (V, \|\cdot\|_\infty)$ est continue.
D'après le théorème des isomorphismes de Banach, l'application réciproque est également continue.

b. Montrer que les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont équivalentes sur le sous-espace V.

c. On note $\bar{B}$ la boule unité fermée de V relativement à la norme $\|\cdot\|_\infty$.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que toutes les fonctions $f \in \bar{B}$ sont lipschitziennes de rapport C.

d. Montrer que $\bar{B}$ est équicontinue.

e. Montrer que V est nécessairement de dimension finie.

Exercice 9. *(partiel 2021)*
Soit $K \in C([-1,1]^2, \mathbb{R})$. On considère l'opérateur à noyau $T : C([-1,1], \mathbb{R}) \to C([-1,1], \mathbb{R})$ associé à K, c'est-à-dire donné par la formule suivante, pour $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$ et $s \in [-1,1]$:

$$T(f)(s) = \int_{-1}^{1} K(s,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

On munit $[-1,1]$ de la distance usuelle et $[-1,1]^2$ de la distance $d((s,t),(s',t')) = |s-s'| + |t-t'|$.
On munit $C([-1,1], \mathbb{R})$ et $C([-1,1]^2, \mathbb{R})$ de la norme du sup, notée $\|\cdot\|_\infty$.

a. Rappeler les théorèmes (et notamment leurs hypothèses) qui permettent d'affirmer :
— que K est bornée sur $[-1,1]^2$,
— que K est uniformément continue sur $[-1,1]^2$.
Rappeler la définition de la continuité uniforme de K sur $[-1,1]^2$.

b. On admet que $T(f)$ est bien un élément de $C([-1,1], \mathbb{R})$ pour toute $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$.
Montrer que l'application linéaire T est continue.

c. On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel qu'on ait $|T(f)(s) - T(f)(s')| \leq 2\epsilon \|f\|_\infty$ pour toute $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$ et tous s, $s' \in [-1,1]$ tels que $|s-s'| \leq \alpha$.

d. On note $B = \{f \in C([-1,1], \mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1\}$ la boule unité fermée de $C([-1,1], \mathbb{R})$.
Montrer que l'adhérence de $T(B)$ dans $C([-1,1], \mathbb{R})$ est compacte.

Exercice 10. *(Partiel 2018)*
On considère l'espace $E = \{f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C} \mid f \text{ continue et } f(-\pi) = f(\pi)\}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On note $B \subset E$ le sous-ensemble formé des fonctions $f : t \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ avec $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$.

a. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)|c_k|^2 \leq 1$. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2}\right)^{1/2}$.
On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour les séries.

Le résultat de la question 1 montre en particulier que pour $f \in B$ la série de fonction $f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ converge normalement, donc f est bien continue.

b. On fixe $t \in [-\pi,\pi]$. Montrer que $\lim\limits_{s\to t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} |e^{iks} - e^{ikt}|^2 = 0$.

c. On fixe $f \in B$. Montrer qu'on a $|f(s) - f(t)| \leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+k^2} |e^{iks} - e^{ikt}|^2\right)^{1/2}$ pour tous s, $t \in [-\pi,\pi]$.

d. On fixe $t \in [-\pi,\pi]$ et $\epsilon > 0$. À l'aide des questions 2 et 3, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $|f(s) - f(t)| \leq \epsilon$ pour tout s tel que $|s-t| \leq \alpha$ et pour toute $f \in B$.

e. Montrer que l'adhérence de B dans E est compacte.

f. Soit $(f_n)_n \in E$ une suite de fonctions.
On suppose que chaque f_n est de classe C^1 et vérifie $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$ et $\int_{-\pi}^{\pi} |f_n'(t)|^2 \mathrm{d}t \leq \pi$.
Montrer que $(f_n)_n$ admet une sous-suite qui converge uniformément.

La question 6 utilise des résultats de la théorie des séries de Fourier. On rappelle notamment l'identité de Parseval : $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$, *pour* $f : t \mapsto \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$.