Complétude

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $x \geq 0$ la suite $(f(kx))_k$ est bornée. Montrer que f est bornée. *On pourra montrer que l'un des ensembles $F_N = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \forall k \; |f(kx)| \leq N\}$ n'est pas d'intérieur vide .*

Exercice 2. Montrer que l'espace $C^1([0,1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est complet.

Exercice 3. On munit $E = \mathcal{C}([0,1])$ de la norme de la convergence uniforme et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère le sous-ensemble suivant de E : $U_n = \{f \in E \mid \forall x \in [0,1] \quad \exists y \in [0,1] \quad |f(x) - f(y)| > n|x - y|\}$.

a. Montrer que U_n est un ouvert de E.
On pourra montrer que ${}^cU_n$ est fermé à l'aide de la caractérisation séquentielle.

b. Montrer que U_n est dense dans E.
Soit g une fonction affine par morceaux dont les pentes sont plus grandes que N en valeur absolue et telle que $\|g\|_\infty \leq \epsilon$. On commencera par montrer que si f est de classe C^1 et N est bien choisi, alors $f + g \in U_n$.

c. Montrer qu'il existe une partie dense de $\mathcal{C}([0,1])$ dont les éléments ne sont dérivables en aucun point de $[0,1]$.
Pour f et $x \in [0,1]$ fixés on pourra considérer la fonction $\phi_x : y \mapsto (f(x) - f(y))/(x - y)$.

Exercice 4. Soit E un espace de Banach.

a. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Montrer que F ne contient aucune des boules $B(0,r)$, pour $r > 0$. Montrer que F est d'intérieur vide.

b. On suppose que E est réunion de sous-espaces fermés F_n. Montrer qu'il existe n tel que $E = F_n$.

c. Montrer qu'un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base (algébrique) dénombrable.

Exercice 5. Soit E un espace de Banach, décomposé sous la forme $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G.

a. Exprimer F et G à l'aide de p. En déduire que si p est continue, F et G sont fermés.

b. On suppose maintenant que F et G sont fermés.
On considère le produit cartésien $F \times G$ muni de la norme $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$.

(i) Montrer que $F \times G$ est complet.

(ii) Montrer que l'application $S : F \times G \to E$, $(x,y) \mapsto x + y$ est continue, bijective, de réciproque continue.

(iii) Montrer que la projection p est continue.

Exercice 6. *(Examen 2018)* Soit E, F des espaces de Banach et $S \in \mathcal{L}(E,F)$ une application linéaire continue.

a. On suppose qu'il existe $T \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

(i) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\|S(x)\| \geq M\|x\|$.

(ii) Montrer que S est injective et que $\operatorname{Im} S$ est complète, puis fermée.

(iii) Montrer que $\operatorname{Ker} T$ est un supplémentaire fermé de $\operatorname{Im} S$.

b. On suppose maintenant que S est injective, que $\operatorname{Im} S$ est fermée, et que $\operatorname{Im} S$ admet un supplémentaire fermé $F_0 \subset F$. On note $S_0 : E \to \operatorname{Im} S$ l'application restreinte de S à l'arrivée.

(i) Montrer que la bijection réciproque de S_0 est continue.

(ii) En utilisant l'exercice précédent, construire une application continue $T : F \to E$ telle que $T \circ S = \mathrm{Id}$.

Exercice 7. *(Examen 2021)* On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C([0,1], \mathbb{R})$ et on note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E. Pour $t \in [0,1]$ on note φ_t l'application linéaire $\varphi_t : E \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(t)$.
On se donne de plus une autre norme $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

— (E, N) est complet ;
— si f_n converge vers f relativement à N alors f_n converge simplement vers f.

a. On fixe $f \in E$. Montrer que la famille de nombres réels $\varphi_t(f)$, avec $t \in [0,1]$, est bornée.

b. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$ l'application φ_t est continue *relativement à N*.

c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f\|_\infty \leq CN(f)$ pour toute $f \in E$.
On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.

d. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.
On pourra appliquer un théorème du cours à l'application $\mathrm{Id} : E \to E$.

Exercice 8. On cherche à estimer la norme dans $L^1([0,2\pi])$ du noyau de Dirichlet

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}.$$

Pour cela on découpe l'intégrale aux points où D_n change de signe :

$$\|D_n\|_1 = 2\int_0^\pi |D_n(t)|\mathrm{d}t = 2\sum_{k=0}^{n-1} I_{n,k} + 2\int_{\frac{2n\pi}{2n+1}}^{\pi} |D_n(t)|\mathrm{d}t, \quad \text{avec} \quad I_{n,k} = \int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} |D_n(t)|\mathrm{d}t.$$

a. En utilisant l'inégalité $\sin x \leq x$ valable sur $\mathbb{R}_+$, montrer que $I_{n,k} \geq 4/((k+1)\pi)$.

b. En déduire que $\|D_n\|_1$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 9. Soit E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme. On note $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)\mathrm{d}t$ le k^{e} coefficient de Fourier de $f \in E$ et $S_n(f) : t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikt} \in E$ les sommes partielles symétriques de la série de Fourier associée à f. On fixe $t \in [0,2\pi]$ et on considère la forme linéaire $L_n : f \mapsto S_n(f)(t)$.

a. Montrer que $L_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s)D_n(t-s)\mathrm{d}s$, où D_n est le noyau de Dirichlet introduit à l'exercice 8.

b. Montrer que $\|L_n\| = \frac{1}{2\pi}\|D_n\|_1$. *On pourra utiliser la densité de $C([0,1])$ dans $L^1([0,1])$.*

c. À l'aide du théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une fonction $f \in E$ telle que la série de Fourier de f ne converge pas au point t.

Exercice 10. *(Écrit agreg 2013, partie IV, extrait ; examen 2021)*
Pour tout segment $S = [a,b] \subset [0,1]$ on considère l'espace de fonctions continues $E_S = C(S,\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur S notée $\|f\|_S = \sup_{t\in S}|f(t)|$.
On considère un sous-espace *fermé* $F \subset E_S$ tel que toutes les fonctions $f \in F$ sont de classe C^1 sur S.
Pour $x \neq y$ dans S et $f \in E_S$ on pose $\varphi_{x,y}(f) = (f(x) - f(y))/(x-y)$.

a. Montrer que $\varphi_{x,y}$ est une forme linéaire continue sur E_S.

b. Montrer que pour $f \in F$ fixée l'ensemble $\{\varphi_{x,y}(f) \mid x,y \in S, x \neq y\}$ est borné dans $\mathbb{R}$.

c. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in F$ et tous $x \neq y$ dans S on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|\,\|f\|_S.$$

d. On fixe des points $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = b$ tels que $|t_{k+1} - t_k| \leq C^{-1}$ pour tout k.
Montrer que pour toute $f \in F$ on a $\sup_{t\in S}|f(t)| \leq \max_k |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_S$.

e. Montrer que F est de dimension finie.

Dans les questions suivantes G est un sous-espace fermé de $E_{[0,1]} = C([0,1],\mathbb{R})$ tel que toutes les fonctions $f \in G$ sont de classe C^1 sur $[0,1[$ (noter la borne exclue).
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}]$, $G_n = \{f_{|S_n} \mid f \in G\} \subset E_{S_n}$ et C_n la constante obtenue pour $S = S_n$ et $F = G_n$ à la question 3. On découpe les intervalles S_n en sous-intervalles de largeur au plus C_n : on obtient une suite strictement croissante de points $t_k \in [0,1]$ telle que $t_1 = 0$ et $\lim_{k\infty} t_k = 1$, et une suite strictement croissante d'indices $k_n \in \mathbb{N}^*$ telles que $t_{k_n} = 1 - \frac{1}{n}$ et $|t_{k+1} - t_k| \leq C_n^{-1}$ pour $k_n \leq k \leq k_{n+1}$.

f. Montrer que pour toute $f \in G$ on a $\sup_{t\in[0,1[}|f(t)| \leq \sup_k |f(t_k)| + \frac{1}{2}\|f\|_{[0,1]}$.

g. Montrer que pour toute $f \in G$ on a $\|f\|_{[0,1]} \leq 2\sup_k |f(t_k)| \leq 2\|f\|_{[0,1]}$.

On note $L \subset \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$ le sous-espace des suites réelles *convergentes*, muni de la norme $\|(x_k)_k\|_\infty = \sup_k |x_k|$. On admet que L' est séparable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble dénombrable de formes linéaires $\varphi_n \in L'$ qui est dense dans L'. On définit $J : E_{[0,1]} \to \ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{R})$, $f \mapsto (f(t_k))_k$.

h. Montrer que J définit un isomorphisme, c'est-à-dire une bijection continue dont la bijection réciproque est continue, entre G et un sous-espace fermé $K \subset L$.

i. Montrer que G' est isomorphe à K', puis que G' est séparable.
On pourra utiliser le théorème de Hahn-Banach.

Cela montre que G, même s'il n'est pas de dimension finie, reste « petit » dans $C([0,1],\mathbb{R})$, dont le dual topologique n'est pas séparable.