Opérateurs positifs

Exercice 1. On considère $H = L^2([-\pi,\pi], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire hermitien $(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$. On note K le sous-espace fermé engendré par les fonction $e_n : t \mapsto e^{int}$, $n \geq 0$ et P la projection orthogonale sur K.
Par ailleurs on note C l'espace des fonctions $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ continues et telles que $f(-\pi) = f(\pi)$. Pour $f \in C$ et $g \in K$ on note $T_f(g) = P(fg)$.

a. Montrer que T_f est un opérateur borné sur K.

b. Pour i, $j \in \mathbb{N}$ exprimer $(e_i|T_f e_j)$ à l'aide des coefficients de Fourier de f.
En déduire que $T_f = T_g \Rightarrow f = g$.

c. Montrer que $T_f^* = T_{\bar{f}}$ et que T_f est un opérateur positif si f est une fonction positive.

Exercice 2. On fixe $r \in]0,1[$. On considère l'espace $(H, \|\cdot\|)$ des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_0 = 0$ et $\|x\|^2 = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |r^{-(n+1)}x_{n+1} - r^{-n}x_n|^2)$ converge.

a. Montrer que H est un espace de Hilbert. Quel est le produit scalaire associé ?

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la forme linéaire $\varphi_n : x \mapsto x_n$ est continue sur H et que $\|\varphi_n\| \leq r^n\sqrt{n}$.

c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y_n \in H$ tel que $(y_n \mid x) = \varphi_n(x)$ pour tout $x \in H$.

d. On note $y_n = (y_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer que $y_{n,k} = r^{n+k}\min(n,k)$ pour tous n, $k \in \mathbb{N}$.
On pourra fixer k, n et considérer la suite $x = (r^l \min(k,l))_{l\in\mathbb{N}}$.

e. Montrer que pour toute suite $a = (a_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N})$ il existe un vecteur $y_a \in H$ tel que $(x \mid y_a) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x \mid y_n)$ pour tout $x \in H$.

f. On considère l'opérateur $T : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ définit par $T(a)_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+k}\min(n,k)$.
Vérifier que T est bien défini et continu.

g. Montrer que T est positif. *On pourra calculer $(y_a \mid y_a)$ à l'aide de T.*

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur borné tel que $T^* = T$.

a. Rappeler la définition de $|T|$. Montrer que $\operatorname{Ker}|T| = \operatorname{Ker} T$. *On pourra calculer $\||T|(x)\|^2$.*

b. Montrer que $(T - |T|)(T + |T|) = 0$.

c. On note $K_+ = \operatorname{Ker}(T+|T|)^\perp$, $K_- = \operatorname{Ker}(T-|T|)^\perp$.
Montrer que $K_+ \perp K_-$, puis que $K_+^\perp \cap K_-^\perp = \operatorname{Ker} T$.
On a ainsi une décomposition en somme directe orthogonale $H = K_- \oplus \operatorname{Ker} T \oplus K_+$.

d. Montrer que $T = |T|$ sur $K_+ \oplus \operatorname{Ker} T$ et $T = -|T|$ sur $K_- \oplus \operatorname{Ker} T$.
Montrer que $T(K_+) \subset K_+$ et $T(K_-) \subset K_-$.

e. Montrer qu'il existe deux opérateurs **positifs** T_+, $T_- \in \mathcal{L}(H)$ tels que $T = T_+ - T_-$ et $|T| = T_+ + T_-$.

f. Montrer que $T \leq |T|$.

Exercice 4. On considère l'espace $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$ muni de la norme $\|\cdot\|_2$. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace des applications linéaires continues de H dans H, muni de la norme d'opérateur.
Pour toute fonction $K \in L^2([0,1]^2, \mathbb{C})$, on considère l'*opérateur à noyau* associé $T : H \to H$, donné par la formule

$$T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que T est une application linéaire continue et que $\|T\| \leq \|K\|_2$.

b. Montrer que l'adjoint T^* de T est un opérateur à noyau.
On précisera quel est le noyau $K^* : [0,1]^2 \to \mathbb{C}$ correspondant à T^*.

c. Soit T_1, T_2 les opérateurs à noyaux associés à deux fonctions K_1, $K_2 \in C([0,1]^2, \mathbb{C})$.
Montrer que $T_3 = T_1 \circ T_2$ est encore un opérateur à noyau. *On exprimera la fonction K_3 correspondante comme une intégrale à paramètres faisant intervenir K_1 et K_2.*

d. On considère le cas où $K_1(s,t) = t^s$ et $K_2(s,t) = s^t$, en convenant que $0^0 = 0$.
Calculer le noyau K_3 correspondant à $T_1 \circ T_2$.

e. On considère le noyau $K : (s,t) \mapsto (s+t+1)^{-1}$.
Montrer que l'opérateur à noyau T associé à K est un opérateur positif.