Université de Caen
UFR Sciences
M1 Maths Générales

1er semestre 2022-2023
Mathématiques
Analyse Complexe

Contrôle Continu n°1

Exercice 1. On note $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$ et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \bar{D}_1$.
On fixe a, $b \in \bar{D}_1$ et on pose $f(z) = (z-a)^{-1} - (z-b)^{-1}$ pour tout $z \neq a$, b.

a. (i) On suppose $a \neq 0$, $b \neq 0$. Montrer que f admet un DSE en 0, déterminer ce dernier et son rayon de convergence R.
   (ii) Montrer que f admet une primitive sur D_R.

b. (i) Soit γ un circuit dans Ω. Faire un dessin.
   Que peut-on dire de $\mathrm{Ind}_\gamma(a)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(b)$? Justifier par un argument topologique.
   (ii) Montrer que f admet une primitive F sur Ω. Et sur $\Omega' = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$?
   (iii) Montrer que $\frac{z-a}{z-b} \exp(-F(z))$ est constant sur Ω.

c. (i) Montrer qu'il existe $g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $\exp(g(z)) = \frac{z-a}{z-b}$ pour tout $z \in \Omega$.
   (ii) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $h : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $h(z)^n = \frac{z-a}{z-b}$ pour tout $z \in \Omega$.

d. Soit P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que ses racines complexes a_1, ..., a_n appartiennent à $\bar{D}_1$.
   Montrer qu'il existe $r : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $r(z)^n = P(z)$ sur Ω.

Exercice 2. On cherche à calculer $G(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ixt} \mathrm{d}x$. On ne demande pas de justifier la convergence de l'intégrale. On rappelle la valeur $G(0) = \sqrt{\pi}$ (intégrale de Gauss). On va utiliser la fonction $f : z \mapsto e^{-z^2}$.

a. Justifier le fait que f admet une primitive sur $\mathbb{C}$.

b. Montrer que $\int_{-R}^{R} f(x+it)\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x - i\int_0^t f(-R+ix)\mathrm{d}x + i\int_0^t f(R+ix)\mathrm{d}x$.
   On utilisera un circuit à préciser dans le plan complexe.

c. Montrer que $|\int_0^t f(R+ix)\mathrm{d}x| \leq e^{-R^2} \int_0^t e^{x^2} \mathrm{d}x$.

d. Montrer que l'intégrale $\int_{-R}^{R} f(x+it)\mathrm{d}x$ a une limite quand $R \to +\infty$ et préciser la valeur de la limite.

e. En déduire la valeur de $G(t)$.

Exercice 3. En utilisant les équations de Cauchy-Riemann, trouver une fonction holomorphe $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, sous la forme $f = u + iv$ avec u, $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, telle que

$$u(x+iy) = e^x(x\cos(y) - y\sin(y)) \quad \text{pour tous } x,\ y \in \mathbb{R}.$$