Contrôle Continu n°2

Les exercices et le problème sont indépendants (ainsi que les deux questions de l'exercice 3).
On apportera un soin particulier à la précision des arguments et justifications.

Exercice 1. On note $U = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

a. (i) Montrer que pour tout $z \in U$ on a $z^{-2} - 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. *On pourra procéder par l'absurde.*

(ii) Rappeler à quelle condition sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ il existe une détermination du logarithme sur Ω. On note $L : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ la détermination du logarithme telle que $L(-1) = i\pi$.

(iii) On définit $f : U \to \mathbb{C}$ en posant $f(z) = iz \exp\left(\frac{1}{2}L(z^{-2} - 1)\right)$.
Donner une expression simple de $f(z)^2$ pour tout $z \in U$.

b. (i) Soit γ un circuit dans U. Rappeler la définition de $\mathrm{Ind}_\gamma(1)$ et $\mathrm{Ind}_\gamma(-1)$.
Exprimer $\int_\gamma 2z\mathrm{d}z/(z^2 - 1)$ en fonction de ces deux indices.

(ii) La fonction $2z/(z^2 - 1)$ admet-elle une primitive sur U ?
Existe-t-il une fonction holomorphe $g : U \to \mathbb{C}$ telle que $\exp(g(z)) = z^2 - 1$ sur U ?

Exercice 2. On considère les fonctions suivantes :

$$f(z) = \frac{ze^z}{(z^2 + 4)}, \quad g(z) = \frac{\cos z}{(\sin z)^2}, \quad h(z) = z \sin\left(\tfrac{1}{z}\right).$$

Étudier la nature des points singuliers suivants : $2i$ pour f, 0 pour g et pour h.
Lorsqu'il s'agit d'un pôle on calculera le résidu correspondant.

Exercice 3. Soit P un polynôme non constant à racines simples complexes $a_1, \ldots, a_n$.
Alors a_i est un pôle simple de $1/P$ pour tout i et on a $\mathrm{Res}_{1/P}(a_i) = 1/P'(a_i)$.
Les questions a et b ci-dessous sont indépendantes.

a. On pose $f(z) = \sum_{i=1}^n [P'(a_i)(z - a_i)]^{-1}$.

(i) Montrer que $f - 1/P$ s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ entier.

(ii) Montrer que $f - 1/P$ est bornée sur $\mathbb{C}$, puis que $1/P = f$.

b. On suppose toujours que P est à racines simples, et de plus que $\deg(P) \geq 2$.

(i) Soit γ_R le cercle de centre 0 et rayon R, parcouru une fois dans le sens direct.
Montrer que $\int_{\gamma_R} \mathrm{d}z/P(z) \to 0$ quand $R \to +\infty$.

(ii) En déduire que $\sum_{i=1}^n 1/P'(a_i) = 0$.

Problème au verso

Problème.

On note $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

a. On fixe une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \Omega$. On définit une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ en posant $g(0) = f'(0)$ et $g(z) = f(z)/z$ pour $z \neq 0$.

(i) Montrer que g est holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ et continue en 0.

(ii) Montrer que g est holomorphe sur Ω. *Plusieurs arguments sont possibles, en utilisant la question précédente ou pas. On précisera le résultat de cours utilisé.*

(iii) On pose $D_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$. Montrer que pour $0 < r < 1$ on a $\sup_{z\in D_r} |g(z)| \leq 1/r$.
On pourra appliquer un principe du maximum, en rappelant précisément le résultat utilisé.

(iv) En déduire qu'on a $|f'(0)| \leq 1$ et $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \Omega$.

(v) On suppose de plus qu'il existe $z_0 \in \Omega \setminus \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, ou que $|f'(0)| = 1$.
Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, tel que $f(z) = \alpha z$ pour tout $z \in \Omega$.
On pourra appliquer à nouveau un principe du maximum en précisant.

b. Pour a, $b \in \mathbb{C}$ on définit $f_{a,b} : \Omega \to \mathbb{C}, z \mapsto \dfrac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}}$. On suppose dans la suite que $|a|^2 = |b|^2 + 1$.

(i) Montrer que $f_{a,b}$ est bien définie, holomorphe, et à valeurs dans Ω.
Pour la dernière assertion on vérifiera que $|az + b|^2 < |\bar{b}z + \bar{a}|^2$ *si* $|z| < 1$.

(ii) Calculer $f_{a,b} \circ f_{\bar{a},-b}$.
On voit ainsi que $f_{a,b}$ *est une bijection holomorphe de* Ω *à réciproque holomorphe.*

c. Soit $f : \Omega \to \Omega$ une bijection holomorphe à réciproque f^{-1} holomorphe.

(i) On suppose tout d'abord que $f(0) = 0$.
Montrer que pour tout $z, w \in \Omega$ on a $|f^{-1}(w)| \leq |w|$ et $|f(z)| \leq |z|$.
En déduire que $f = f_{c,0}$ avec $|c| = 1$.

(ii) On ne suppose plus que $f(0) = 0$ et on pose $w = f(0)$.
On a $|w| < 1$ et on peut donc écrire $w = -b/a$ avec $|a| > |b|$; quitte à multiplier par un réel positif on peut de plus supposer que $|a|^2 = |b|^2 + 1$. Combien vaut alors $f_{a,b}(w)$?
Montrer que f est de la forme $f_{d,e}$.