Université de Caen
UFR Sciences
L3 Maths

1er semestre 2022–2023
Portail MIM
Calcul formel

Devoir Surveillé
13 décembre 2022

Dans ce sujet les fonctions mathématiques f, g sont implémentées par des procédures Python `f(x)`, `g(x)` qui renvoient la valeur de la fonction étudiée au point `x`.

Exercice 1.

a. Que fait la procédure `Mystère` suivante ? Quel nom porte cette méthode ?

```
def Mystère(f,a,b,y):
    x = (a+b)/2
    while b-a > 1e-10:
        if (f(a)-y)*(f(x)-y) < 0: b = x
        else: a = x
        x = (a+b)/2
    return x
```

Proposer une modification de cette procédure qui réalise moins d'appels à la fonction `f`.

b. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La méthode de Newton consiste à rechercher un zéro de f en l'approchant par une suite $(x_k)_k$ définie par récurrence. Faire un schéma pour expliquer graphiquement comment x_{k+1} est défini en fonction de f et x_k. Donner la relation de récurrence correspondante.

c. Écrire une procédure `Newton(f,g,a,b)` qui renvoie un zéro de `f` dans l'intervalle $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$ à l'aide de la méthode de Newton, en partant du point `x = (a+b)/2`. L'argument `g` sera utilisé pour fournir à la procédure la dérivée de `f`. Plus précisément, la procédure retournera un réel $\mathtt{x} \in [\mathtt{a},\mathtt{b}]$ tel que `abs(f(x)) < 1e-10`. Si la méthode de Newton fait sortir de l'intervalle $[\mathtt{a},\mathtt{b}]$, la procédure retournera `None`.

Exercice 2. On représente un polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ par la liste `L =` $[a_0, \dots, a_n]$ de ses coefficients.

a. Écrire une procédure `Éval(L,x)` qui calcule la valeur en `x` d'un polynôme donné par la liste `L` de ses coefficients. On utilisera de préférence la méthode de Horner pour ce calcul.

b. Écrire une procédure `Dérivée(L)` qui calcule la dérivée d'un polynôme, au niveau des listes de coefficients. L'argument `L` aussi bien que la valeur retournée par la procédure sont donc des listes de coefficients.

On définit une suite de polynômes P_n par récurrence en posant $P_0 = 1$, $P_1 = 3X$ et

$$P_{n+1}(X) = \frac{2n+3}{n+1} X P_n(X) - \frac{n+2}{n+1} P_{n-1}(X).$$

On admet que le polynôme P_n admet n racines deux-à-deux distinctes dans l'intervalle $[-1, 1]$.

c. Écrire une procédure `Récurrence(Q,R,n)` qui retourne la liste des coefficients de P_{n+1} si on lui passe en argument l'indice `n` et les listes `Q`, `R` des coefficients de P_n et P_{n-1}.

d. Écrire une procédure `Critiques(L,Z)` qui retourne la liste des racines de P_n' si on lui passe en argument la liste `L` des coefficients de P_n et la liste `Z` des racines de P_n. On suppose qu'on dispose d'une procédure `Zéro(f,a,b)` qui retourne un zéro de la fonction `f` entre `a` et `b`.

e. Écrire une procédure `Norme(L,Z)` qui retourne la norme $\|P\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|$ du polynôme P et un point `x` où cette norme est atteinte, si on lui passe en argument la liste `L` des coefficients de P et la liste `Z` des racines de P'. On évitera de procéder à un balayage « naïf » de l'intervalle.

Exercice 3.

a. On souhaite calculer une valeur approchée de $I(f, a, b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de la méthode des trapèzes.

Expliquer sur un schéma le principe de la méthode. Écrire la formule pour l'aire d'un des trapèzes (avec des notations à préciser sur le schéma). Donner la formule pour la valeur approchée $J_n(f, a, b)$ de $I(f, a, b)$ obtenue avec n trapèzes.

b. Écrire une procédure `Trapèzes(f,a,b,n)` qui calcule $J_{\mathtt{n}}(\mathtt{f}, \mathtt{a}, \mathtt{b})$.

On reprend la suite de polynômes P_n de l'exercice précédent. On souhaite vérifier que ces polynômes sont deux-à-deux orthogonaux pour le produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\mathrm{d}t.$$

c. Écrire un programme qui utilise les procédures de cet exercice et de l'exercice précédent pour vérifier l'orthogonalité de P_n et P_m pour $0 \le m < n \le 6$. On calculera les intégrales avec 10^5 trapèzes.