Contrôle Continu n°1

Durée : 1h30. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées avec rigueur et précision. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. Les manipulations d'inégalités, équivalents, limites, ..., doivent être expliquées en détail.

Les deux exercices sont indépendants.

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^3+x}$. On fixe $a > 0$.

a. Justifier soigneusement la convergence de la série numérique $\left(\sum_n \dfrac{n^4+na+1}{n^6}\right)$.

b. Montrer que pour tout $x \in [0,a]$ on a

$$\left|\frac{(n^4+nx)\cos(nx)-\sin(nx)}{(n^3+x)^2}\right| \leq \frac{n^4+na+1}{n^6}.$$

On justifiera de manière détaillée les manipulations d'inégalités.

c. On admet que la série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on note f sa somme. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Problème. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 e^{-nx}$.

a. Déterminer pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série numérique $(\sum_n f_n(x))$ converge.
On note f la somme de la série de fonctions $(\sum_n f_n)$, là où elle converge.

b. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Tracer le tableau de variations de f_n sur $\mathbb{R}$.
On fera figurer les limites en $-\infty$, $+\infty$ et les valeurs des extrémums locaux de f_n.

c. Montrer que la *suite de fonction* $(f_n)_n$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que la *série de fonctions* $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

e. *Question de cours.* Énoncer le théorème d'interversion série/intégrale.

f. On note F_n la primitive de f_n nulle en 0. On fixe $a > 0$. Montrer qu'on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} F_n(a) = \int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

g. Par une double intégration par parties on peut calculer F_n. *On ne demande pas de faire ce calcul.*
On trouve $F_n(x) = \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^3}(n^2x^2+2nx+2)e^{-nx}$.

Justifier le fait que F_n est croissante et calculer sa limite en $+\infty$.
En déduire la convergence normale de la série de fonctions $(\sum_n F_n)$ sur $\mathbb{R}_+$.

h. À l'aide des questions précédentes, démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\mathrm{d}t.$