Université de Caen
UFR Sciences
L2 Maths

2$^{\text{e}}$ semestre 2022-2023
Mathématiques
Analyse 4

Contrôle Continu n°2

Durée : 2h. Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets électroniques sont interdits.

Les réponses doivent être justifiées : une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. En particulier les hypothèses des théorèmes utilisés doivent être mentionnées et vérifiées. La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction seront prises en compte à la correction.

Les trois exercices sont indépendants.

Exercice. Soit $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, dont on note u et v les variables. On définit une fonction $g : E \to \mathbb{R}$ en posant

$$g(x,y) = f\left(xy, \frac{y}{x}\right).$$

a. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

b. Montrer qu'on a $x\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = y\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ pour tout $(x,y) \in E$ si et seulement si on a $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v) = 0$ pour tout $(u,v) \in E$.

Exercice. On considère la série entière $\left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)$ avec $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{4n^2-1}\, x^{2n+1}$.

a. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.

b. Montrer que la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 1} f_n(x)\right)$ converge normalement sur $[-R, R]$.
On note $f : [-R,R] \to \mathbb{R}$ sa somme.

c. Montrer que f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. Exprimer f' comme somme d'une série entière.

d. On pose $g(x) = \arctan(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donner les DSE de g' puis de g en 0.
On admettra (et on ne demande pas de redémontrer) que le rayon de convergence de ces DSE vaut 1.

e. En comparant les deux questions précédentes, donner une expression de $f'(x)$ sans le symbole somme, pour tout $x \in\,]-R, R[$.

f. À l'aide d'un calcul intégral, donner une expression de f sans le symbole symbole sur $]-R, R[$.
L'identité $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$ peut éventuellement être utile.

g. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Exercice. On introduit un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en posant

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\} \quad \text{et} \quad f(x,y) = x^2 y(1-x-y).$$

a. (i) Montrer que $f(x,y) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in F$.
(ii) Représenter F, ainsi que les points $(x,y) \in F$ pour lesquels $f(x,y) = 0$.
(iii) Montrer, avec tout le détail nécessaire, que f est bornée et atteint ses bornes sur F.
(iv) Quelle est le minimum de f sur F ? En quel(s) point(s) est-il atteint ?

b. (i) Déterminer les points critiques de f dans $\mathbb{R}^2$.
(ii) Quel est le maximum de f sur F ? En quel(s) point(s) de F est-il atteint ? Justifier.
Il est inutile de calculer les dérivées partielles secondes de f. On pourra en revanche utiliser l'ensemble $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ x+y < 1\}$.