

SÉRIES DE FONCTIONS

Exercice 1. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

- Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R} . On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur \mathbb{R} . En déduire que g est continue.
- Montrer que g est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2 + x^2}$.

- Montrer que $(\sum_n f_n)$ est simplement convergente sur \mathbb{R} .
- Montrer que la somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = xe^{-nx}$.

- La série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge-t-elle simplement sur \mathbb{R}_+ ?
- Converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? et sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$? *On procédera à une étude de fonction.*
- Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
La série de fonctions $(\sum_n f_n)$ converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?

Exercice 4. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan \frac{x}{n}$.

- Soit a un réel strictement positif. Montrer $(\sum_n f_n)$ converge normalement sur $[-a, a]$.
- Soit $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ la fonction somme.
 - Montrer f est continue sur \mathbb{R} .
 - Montrer f est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 5. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{n + x^3}{x + n^3}$.

- Montrer la convergence simple de la série sur \mathbb{R}_+ . On note $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- La série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ?
- On fixe $a > 0$.
 - Montrer que pour tout $x \in [0, a]$ on a $|f_n(x)| \leq (n + a^3)/n^3$.
 - Montrer que la série $(\sum_{n \geq 1} f_n)$ converge normalement sur $[0, a]$.
- Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 6. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

- Montrer que la série $(\sum f_n)$ converge normalement sur \mathbb{R}_+ . Montrer que g est continue sur \mathbb{R}_+ .
- La série $(\sum f'_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? et sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$?
Montrer que g est de classe C^2 sur \mathbb{R}_+ . Déterminer $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x)$.
- Calculer $g''(x)$, puis $g'(x)$, pour tout $x > 0$.
- Montrer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = - \int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-t}) dt.$$

Exercice 7. On considère la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ avec $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$.

- Montrer que cette série de fonctions converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
On note $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
- Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}_+ .
- La série $(\sum f_n)$ converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ? sur $[a, b]$ avec $0 < a < b < +\infty$?
- Montrer que f est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Montrer que $\lim_{+\infty} f = 0$.

Exercice 8.

- Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\frac{x^n}{n^2}$ est-elle convergente?
- Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, pour tout $x \in [-1, 1]$. Montrer que f est continue sur $[-1, 1]$ et de classe C^1 sur $] -1, 1[$.
- Calculer la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = f(x) + f(1-x) + (\log x) \log(1-x)$.
- Démontrer la formule $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = (\log 2)^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1} n^2}$.

Exercice 9.

- Montrer que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \frac{1}{n(1+nx)}$ converge simplement sur \mathbb{R}_+^* .
- Montrer que la fonction $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est positive et décroissante.
- Montrer que S est continue sur \mathbb{R}_+^* et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
- Soit $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x > 0$, $S_n(x) \leq S(x)$.
- Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = +\infty$.

Exercice 10. Pour tout $x > 1$ on pose

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \quad \text{et} \quad d_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

- Justifier le fait que $\zeta(x)$ et $f(x)$ sont bien définies pour $x > 1$. Calculer $f(x)$.
Montrer que la suite de fonction $(d_n)_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$ vers une fonction d à déterminer.
- Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 1$ on a

$$0 \leq \frac{1}{k^x} - \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}.$$

En déduire un encadrement de $d(x) - d_n(x)$.

- Montrer que la suite de fonctions $(d_n)_n$ converge uniformément vers d .
- Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ les sommes partielles de la série harmonique.
On rappelle qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Montrer qu'on a $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ lorsque $x \rightarrow 1$.

Exercice 11. Pour $z \in \mathbb{C}$ et $x > 0$ on rappelle que $x^z = \exp(z \ln(x)) \in \mathbb{C}$. On considère les séries de fonctions

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad \text{et} \quad \eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^z}.$$

- Montrer que $|x^z| = x^{\operatorname{Re}(z)}$. En déduire que ζ et η sont bien définies et continues sur $H = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 1\}$.
- On pose $g_n(z) = (-1)^{n+1}/n^z$.
 - Montrer qu'on a $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z) = \frac{1 - (1 - \frac{1}{2n})^z}{(2n-1)^z}$.
En déduire un équivalent simple de $g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
On admet que le $DL_1(0)$ de $(1+t)^\alpha$ reste valable pour $\alpha \in \mathbb{C}$.
 - Montrer que $(\sum_{n \geq 1} g_{2n-1}(z) + g_{2n}(z))$ converge absolument si $\operatorname{Re}(z) > 0$.
 - En déduire que η est bien définie sur $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$.
- (i) Lorsque $\operatorname{Re}(z) > 1$, déterminer une relation entre $\zeta(z)$ et $\eta(z)$.
On pourra observer les simplifications dans la différence $\zeta(s) - \eta(z)$.
(ii) Déterminer l'ensemble $Z = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 - 2^{1-z} = 0\}$.

On étend ζ à $K' = K \setminus Z$ grâce à la relation entre ζ et η . C'est en fait l'unique manière de prolonger ζ en une fonction dérivable *au sens complexe* sur K' . On peut alors poser la fameuse question : si z est un zéro de ζ dans la bande $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$, a-t-on nécessairement $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$?