

INTÉGRALES ET PRIMITIVES

Exercice 1. Calculer $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$ dans les cas suivants :

- γ est le segment orienté $[0, 2i]$;
- γ est le cercle trigonométrique parcouru une fois dans le sens direct ;
- γ est l'arc de parabole $y = x^2$ parcouru de 0 à $1 + i$.

Exercice 2. Soit γ le cercle unité, parcouru une fois dans le sens direct. On pose $f_n(z) = z^{-1}(z + z^{-1})^{2n}$, pour $z \in \mathbb{C}^*$.

- Rappeler la valeur de $\int_{\gamma} z^k$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
- En développant, montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \binom{2n}{n}$.
- En notant que $z + z^{-1} = 2 \operatorname{Re}(z)$ sur γ^* , montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f_n(z) dz = \frac{2^{2n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt$.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Wallis $W_{2n} = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^{2n} dt$.

Exercice 3. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ un chemin. On définit $\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ en posant $\delta(t) = \gamma(t)^{-1}$. Montrer que pour toute fonction continue $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ on a

$$\int_{\gamma} f\left(\frac{1}{z}\right) dz = - \int_{\delta} \frac{f(z)}{z^2} dz.$$

Qu'obtient-on dans le cas où γ est le cercle unité ?

Exercice 4. Calculer $\int_{\gamma} dz/z$ où γ est le carré de sommets $\pm 1 \pm i$ parcouru une fois dans le sens direct. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. Calculer directement $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) dz$, où γ est le cercle unité parcouru une fois dans le sens direct. Refaire le calcul en utilisant l'identité $2 \operatorname{Re}(z) = z + z^{-1}$ sur le cercle unité.

Exercice 6. On fixe $a, b > 0$. À l'aide de l'indice de 0 par rapport à l'ellipse $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto a \cos(t) + ib \sin(t)$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2(\cos t)^2 + b^2(\sin t)^2}.$$

Exercice 7. Soit $P(z) = (z - w_1) \cdots (z - w_n)$ un polynôme. On note $\gamma_{a,r}$ le cercle de centre $a \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, parcouru une fois dans le sens direct, et $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ le disque correspondant.

- Rappeler combien vaut $\int_{\gamma_{a,r}} dz/(z - w)$, selon la valeur de $w \notin \gamma_{a,r}^*$.
- Donner la décomposition en éléments simples de P'/P .
- On suppose que P n'a pas de racines dans $\gamma_{a,r}^*$. Montrer que l'intégrale suivante est égale au nombre de racines de P dans $D(a, r)$, comptées avec multiplicité :

$$\int_{\gamma_{a,r}} \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

Exercice 8.

En s'inspirant de l'exercice précédent, calculer l'intégrale suivante à l'aide d'indices par rapport au cycle γ :

$$\int_{\gamma} \frac{(2+i)z^2 - 2z + i}{z^3 - z^2 + z - 1} dz.$$

Exercice 9. Calculer $\int_{\gamma} ze^{z^2} dz$ dans les cas suivants :

- γ est le segment orienté $[0, 1 + i]$;
- γ est l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ parcouru une fois de 0 à $1 + i$.

Exercice 10. On pose $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$ et $f(z) = 1/(1+z^2)$ pour $z \neq \pm i$.

- Développer f en éléments simples dans \mathbb{C} .
- Montrer que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ pour tout circuit γ dans Ω .
- Montrer que f admet une unique primitive F dans Ω telle que $F(1) = \pi/4$.
- f admet-elle une primitive dans $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$? dans $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$?

Exercice 11. On considère le bord γ_R du secteur angulaire $\{re^{i\theta} \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, parcouru une fois dans le sens direct. On note δ_R l'arc de cercle $\{Re^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$, parcouru une fois dans le sens direct.

- Pourquoi la fonction $f : z \mapsto \exp(iz^2)$ admet-elle une primitive sur \mathbb{C} ?
- Combien vaut $\int_{\gamma_R} \exp(iz^2)dz$?
- Montrer que $|\int_{\delta_R} \exp(iz^2)dz| \leq \pi(1 - e^{-R^2})/4R$.
On pourra utiliser l'inégalité $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t$ valable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- En faisant tendre R vers $+\infty$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
- En déduire les valeurs de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2)dt$, $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)dt$, $\int_0^{+\infty} \sin(t)dt/\sqrt{t}$.

Exercice 12. On fixe $a, b \in \mathbb{C}^*$. Déterminer les primitives sur \mathbb{C}^* de ze^{az} , $e^{az} \cos(bz)$.

Exercice 13. On note Log la détermination principale du logarithme.

- Combien vaut $\text{Log}(e^{i\pi/2}e^{3i\pi/4})$?
- Pour $z = e^{2i\pi/3}$, comparer $\text{Log}(z^2)$ et $2\text{Log}(z)$.
- Pour $z = 3 + 4i$, combien vaut $\text{Log}(\exp(z))$?
- Montrer que si $\text{Re}(z) > 0$, $\text{Re}(z') > 0$ alors $\text{Log}(zz') = \text{Log}(z) + \text{Log}(z')$.
- Pour quels nombres complexes z a-t-on $\text{Log}(\exp(z)) = z$?

Exercice 14. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide et $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. On appelle détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω toute fonction holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(z)^p = z$ pour tout $z \in \Omega$.

- Montrer que si f est une détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω on a $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. En déduire que $0 \notin \Omega$.
- Montrer que s'il existe une détermination du logarithme sur Ω , alors il existe une détermination de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω .
- Montrer que s'il existe une détermination f_1 de $\sqrt[p]{\cdot}$ sur Ω connexe alors il en existe exactement p , que l'on explicitera en fonction de f_1 .
- Montrer qu'il existe une unique détermination f de $\sqrt[3]{\cdot}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ telle que $f(1) = 1$. Combien vaut $f(i^3)$?
- Montrer qu'il existe une unique détermination f de $\sqrt{\cdot}$ sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ telle que $f(-1) = i$. Déterminer $f(\Omega)$.

Exercice 15. Pour tous $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, $w \in \mathbb{C}$ on pose $z^w = \exp(w \text{Log}(z))$, où Log est la détermination principale du logarithme.

- Calculer i^i , $\text{Re}((1+i)^i)$.
- Pour $z = e^{3i\pi/4}$, comparer z^{2i} , $(z^2)^i$ et $(z^i)^2$.
- Calculer dz^w/dz .